1 семестр

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Лекция 1. Предел функции в точке и при $x \to \pm\infty$. Односторонние пределы. Действия над пределами. Бесконечно малые функции, таблица эквивалентных бесконечно малых и ее применение при вычислении пределов функций

1.1. *Обозначения*

Множества (любой природы) обозначаются большими латинскими буквами $(A, B, ...)$, а их элементы – малыми латинскими буквами $(a, b, x, y, ...)$. Большими латинскими буквами обозначаются также высказывания (например, $A \equiv \{$число $m \cdot (m+1) \cdot (m+2)$ делится на 3$\}$). Везде ниже вводятся следующие обозначения:

$\forall$ – "всякий", "каждый", " для всякого","для каждого",

$\exists$ – "существует", "найдется хотя бы один",

$\in$ – "принадлежит", $\notin$ – "не принадлежит",

$\Rightarrow$ – "следует из", "вытекает из",

$\Leftrightarrow$ – "эквивалентно", "необходимо и достаточно", "тогда и только тогда",

$\subset$ – "входит в", "содержится в"

$\equiv$ или $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ – "по определению" (в тексте слово "если")

$\wedge$ – логическое "**И**", $\vee$ – логическое "**ИЛИ**",

$A \cup B$ – объединение множеств A и B, $A \cap B$ – пересечение множеств A и B,

$A \backslash B$ – разность множеств A и B, $\bar{A}$ – дополнение A (если A – высказывание то $\bar{A}$ – отрицание высказывания A).

Через $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ обозначаются множества натуральных, целых, рациональных и действительных чисел соответственно $(\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R})$.

1.2. Модуль (абсолютная величина) действительного числа

Модуль числа a определяется следующим образом:

$$|a| = \begin{cases} +a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Свойства модуля:

1. $(|x| \geq +x) \wedge (|x| \geq -x)$; **2.** $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$; **3.** $|x| \geq a \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x \geq +a) \vee (x \leq -a)$;

4. $|x + y| \leq |x| + |y|$; **5.** $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$; **6.** $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$;

7. $|x^\alpha| = |x|^\alpha$;

8. $|x - y| \geq ||x| - |y||$.

1.3. Понятие функции

Пусть даны два множества A и B.

Определение 1.1. *Говорят, что на множестве A задана функция $y = f(x)$, отображающая множество A в множество B (пишут $y = f(x)$ если каждому элементу $x \in A$ поставлен в соответствие единственный элемент $y \in B$ по закону $y = f(x)$. При этом x называется аргументом функции $y = f(x)$, а y – значением этой функции (при указанном значении аргумента x). Множество A называется* ***областью определения*** *функции $f(x)$ (обозначение: $A = D(f)$), а множество $E(f) = \{y \in B / \exists x \in A : y = f(x)\}$ называется* ***множеством значений этой функции****.*

Чаще всего функцию задают двумя способами: а) *табличный способ* (здесь для каждого аргумента x указывается соответствующий y) и б*) аналитический способ* (формулой; например $y = \sqrt{\sin(\log_2 x)}$). При аналитическом задании функции $y = f(x)$ в качестве области определения обычно берут *естественную область определения*, т.е. множество $D(f) = \{x :$ выражение $f(x)$ имеет смысл$\}$. Например, $D\left(\sqrt{\log_2 x}\right) = \{x : x \geq 1\}$. Будет также использоваться обозначение $f(G)$ для множества всех значений $f(x)$, когда x пробегает подмножество $G \subset D(f)$.

1.4. Предел функции

Сначала дадим понятие предела функции в конечной точке $x = x_0 \neq \infty$. Различают *проколотую δ-окрестность* $\dot{U}_{x_0}(\delta)$ *точки* $x = x_0$, которая определяется как симметричный интервал $(x_0-\delta, x_0+ \delta)$ с выброшенной точкой x_0 :

$$\dot{U}_{x_0}(\delta) \equiv \{x : 0 < |x - x_0| < \delta\},$$

и просто *δ-окрестность* $U_{x_0}(\delta)$ точки $x = x_0$, совпадающую с указанным интервалом:

$$U_{x_0}(\delta) \equiv \{x : |x - x_0| < \delta\} \equiv (x_0 - \delta, x_0 - \delta).$$

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}_{x_0}$ точки x_0 (в самой точке x_0 функция может быть определена или нет; её значение в точке x_0 не существенно).

Определение 1.2. Говорят, что число P является пределом функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ (или при $x \to x_0$), если для произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ (зависящее, вообще говоря, от ε) такое, что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, будет иметь место неравенство $|f(x) - P| < \varepsilon$. При этом пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = P$ и читают: “ предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$ равен P”.

Это определение записывают кратко так:

$$\begin{aligned} &(\lim_{x\to x_0} f(x) = P) \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall\varepsilon > 0 \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \\ &(\forall x)(0 < |x - x_\delta| < \delta \Rightarrow |f(x) - P| < \varepsilon). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Отметим, что в этом определении не фигурирует значение функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ (x стремится к x_0, но $x \neq x_0$, так как $0 < |x-x_0|$). Это означает, что предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = P$ не зависит от того, каким является значение функции $f(x)$, в точке $x = x_0$. Например, функции

$$f_1(x) = x^2,\ \ f_2(x) = \begin{cases} x^2, x \neq 0, \\ 100, x = 0, \end{cases}\ \ f_3(x) = \begin{cases} x^2, x \neq 0, \\ \text{не определена, если } x = 0 \end{cases}$$

имеют один и тот же предел $P=0$ в точке $x=0$.

Геометрически высказывание (1.1) означает, что для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$ такое, что кривая $y=f(x)$ при всех $x\in \in \dot{U}_{x_0}(\delta)$ лежит внутри полосы $(P-\varepsilon<y<P+\varepsilon)$. Если эта ситуация будет иметь место для произвольного интервала $(P-\varepsilon,P+\varepsilon)$ (или, что то же самое, для произвольного $\varepsilon>0$), то число P будет пределом функции $f(x)$ при $x\to x_0$. Если же существует интервал $(P-\varepsilon,P+\varepsilon)$ такой, что в любой проколотой окрестности $\dot{U}_{x_0}(\delta)$ точки $x=x_0$ найдется абсцисса x, для которой $f(x)\notin(P-\varepsilon,P+\varepsilon)$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq P$. Геометрические соображения часто используют при доказательстве существования пределов для конкретных функций.

Теорема 1.1. *Если существует (конечный) предел* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = P$, *то он единственен, а сама функция f(x) является ограниченной при* $x\to x_0$, т.е.

существуют постоянные $M>0,\,\delta>0$ ***такие, что для всех*** x ***из проколотой окрестности*** $\dot{U}_{x_0}(\delta)\equiv\{x:0<|x-x_0|<\delta\}$ ***точки*** x_0 ***имеет место неравенство*** $|f(x)|\leq M$.

Замечание 1.1. Если функция $f(x)$ удовлетворяет условию, выделенному жирным шрифтом, то ее называют функцией *класса* $O(1)\,(x\to x_0)$ *и пишут* $f(x)=O(1)\,(x\to x_0)$. Функции класса $O(1)\,(x\to x_0)$ обладают следующими очевидными свойствами.

Теорема 1.2. *Если* $f(x)=O(1)(x\to x_0)$ *и* $g(x)=O(1)(x\to x_0)$, *то* $f(x)\pm g(x)=O(1)(x\to x_0), f(x)\cdot g(x)=O(1)(x\to x_0)$.

1.5. Бесконечно малые функции и их свойства

Определение 1.3. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой функцией в точке* $x=x_0$ *или функцией класса* $o(1)\,(x\to x_0)$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$. При этом пишут $\alpha(x)=o(1)\,(x\to x_0)$.

Таким образом, $\alpha(x)=o(1)\,(x\to x_0)\overset{def}{\Leftrightarrow}\forall\varepsilon>0\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0:(\forall x)\,(0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|\alpha(x)|<\varepsilon)$.

Например, функция $\alpha(x)=(1-x)^2=o(1)\,(x\to 1)$, а функции $\cos(1/x)\,, x+1, \ln(x+2)$ не являются функциями класса $o(1)\,(x\to 0)$.

Теорема 1.3. *Имеют место следующие свойства класса* $o(1)\,(x \to x_0)$:

1^0) *Если* $\alpha(x) = o(1)\,(x \to x_0)$, то $\alpha(x) = O(1)\,(x \to x_0)$, т.е. $o(1) \subset O(1)\,(x \to x_0)$;

2^0) $o(1) \pm o(1) = o(1)\,(x \to x_0)$;

3^0) $o(1) \cdot o(1) = o(1)\,(x \to x_0)$;

4^0) $o(1) \cdot O(1) = o(1)\,(x \to x_0)$.

Доказательство. Свойство 1^0) очевидно. Докажем свойство 2^0) (другие свойства доказываются аналогично). Пусть $\alpha(x) = o(1)$ и $\beta(x) = o(1)\,(x \to x_0)$. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют числа $\delta_j = \delta_j(\varepsilon) > 0\,(j = 1, 2)$ такие, что

$$(\forall x)\left(0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |\alpha(x)| < \tfrac{\varepsilon}{2}\right), \tag{1.2}$$
$$(\forall x)\left(0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |\beta(x)| < \tfrac{\varepsilon}{2}\right). \tag{1.3}$$

Выберем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Тогда $\forall x \in \dot{U}_{x_0}(\delta)$ будут иметь место одновременно неравенства (1.2) и (1.3). Складывая их, получим, что

$$(\forall x)\left(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\alpha(x) + \beta(x)| \le |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\right).$$

Это и означает, что $\alpha(x) + \beta(x) = o(1)\,(x \to x_0)$, т.е. верно свойство 2^0). Теорема доказана.

Следующая теорема устанавливает связь между бесконечно малыми функциями и функциями, имеющими предел при $x \to x_0$.

Теорема 1.4. *Если существует (конечный) предел* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = P$, *то* $f(x) = P + o(1)\,(x \to x_0)$. *Обратно: если функция* $f(x)$ *представляется в виде* $f(x) = P + o(1)\,(x \to x_0)$, *то* $f(x)$ *имеет предел в точке* $x = x_0$ *и* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = P$.

Доказательство. Существование предела $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = P$ эквивалентно высказыванию

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (\forall x)\,(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - P| < \varepsilon). \tag{1.4}$$

Высказывание (1.4), в свою очередь, эквивалентно тому, что функция $\alpha(x) = f(x) - P = o(1)\ (x \to x_0)$, т. е. что $f(x) = P + o(1)\,(x \to x_0)$. Теорема доказана.

Замечание 1.2. Равенство $f(x) = P + o(1)\,(x \to x_0)$ называют *асимптотическим разложением функции* $f(x)$, *имеющей предел в точке* $x = x_0$.

И, наконец, дадим определение предела функции в бесконечности. Сделаем это кратко.

Определение 1.4. Множества

$$U_\infty(R) = \{x : |x| > R\}\,, U_{-\infty}(R) = \{x : x < -R\}\,,$$
$$U_{+\infty}(R) = \{x : x > R\}$$

называются R-окрестностями точек $x_0 = \infty, x_0 = -\infty, x_0 = +\infty$ соответственно. Следующие высказывания являются определениями предела функции $f(x)$ в бесконечности:

$$1)\,(\lim_{x\to\infty} f(x) = P) \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall\varepsilon > 0 \exists R = R(\varepsilon) > 0 :$$

$$(\forall x)\,(x \in U_\infty(R) \Rightarrow |f(x) - P| < \varepsilon));$$

$$2)\,(\lim_{x\to-\infty} f(x) = P) \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0 \exists R = R(\varepsilon) > 0 :$$

$$(\forall x)\;(x \in U_{-\infty}(R) \Rightarrow |f(x) - P| < \varepsilon));$$

$$3)\,(\lim_{x\to+\infty} f(x) = P) \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall\varepsilon > 0 \exists R = R(\varepsilon) > 0 :$$

$$(\forall x)\,(x \in U_{+\infty}(R) \Rightarrow |f(x) - P| < \varepsilon)\,.$$

Перейдем теперь к обоснованию арифметических действий над пределами.

Теорема 1.5. *Если существуют (конечные) пределы* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = P_1$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = P_2$, *то и существуют пределы* $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x) \pm g(x)]$, $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x) \cdot g(x)]$ *при этом*

$$\lim_{x\to x_0}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)\,,$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)\,.$$

Если (кроме существования пределов P_1 *и* P_2 *) выполняется ещё условие* $P_2 \neq 0$, *то существует предел частного* $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)/g(x)]$, *причем*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

Доказательство. Докажем, например, теорему о пределе произведения. Так как существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = P_1$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = P_2$, то по теореме 1.4 имеют место асимптотические разложения $f(x) = P_1 + o(1)\,(x \to x_0)$, $g(x) = P_2 + o(1)\,(x \to x_0)$. Умножая эти равенства друг на друга, будем иметь

$$f(x)\cdot g(x) = P_1P_2 + P_1\cdot o(1) + P_2\cdot o(1) + o(1)\cdot o(1).$$

Поскольку $P_j = \mathrm{const} = O(1)\,(x \to x_0)$, то $P_j \cdot o(1) = o(1), j = 1, 2$ (см. теорему 1.3). Далее, поскольку $o(1)\cdot o(1) = o(1), o(1) + o(1) + o(1) = o(1)$, то функция $f(x)\cdot g(x)$ представляется в виде $f(x)\cdot g(x) = P_1P_1 + o(1)\,(x \to x_0)$. По теореме 1.4 отсюда следует, что существует предел произведения $f(x)\cdot g(x)$ при $x \to x_0$ и он равен

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)\cdot g(x)] = P_1\cdot P_2 = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Теорема доказана.

1.6. Эквивалентные бесконечно малые. Таблица эквивалентных бесконечно малых

Введем следующее понятие. Пусть x_0 — конечная или бесконечная точка и пусть функции $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности точки x_0.

Определение 1.5. *Две бесконечно малые функции* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *(при* $x \to x_0$ *) называются эквивалентными, если* $\beta(x) \neq 0$ *в некоторой проколотой окрестности* $\dot{U}_{x_0}(\delta)$ *и если*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

При этом пишут: $\alpha(x) \sim \beta(x)\ (x \to x_0)$.

Важность этого понятия становится ясной при формулировке следующего утверждения, используемого при вычислении пределов.

Теорема 1.6. *Если* $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)\,(x \to x_0)$ *и если существует предел* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = P$, *то существует и предел* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ *и он также равен числу* P.

Доказательство. Переходя в тождестве $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \equiv \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}$ к пределу при $x \to x_0$ и учитывая, что $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)\,(x \to x_0)$, получае утверждение теоремы.

Используя эту теорему, а также формулы:

Таблица 1.1 эквивалентных бесконечно малых

Если $u(x) \to 0$ *при* $x \to x_0$, *то при* $x \to x_0$ *верны следующие* соотношения:

1) $\sin u \sim u$,

2) $\mathrm{tg} u \sim u$,

3) $\arcsin u \sim u$,

4) $\mathrm{arctg}\, u \sim u$,

5) $1 - \cos u \sim \dfrac{1}{2}u^2$,

6) $e^u - 1 \sim u$,

7) $a^u - 1 = u \ln a,\ a > 0, a \neq 1$,

8) $\ln(1+u) \sim u$,

9) $(1+u)^\sigma - 1 \sim \sigma \cdot u$, $\sigma = \mathrm{const}$.

можно без особого труда вычислять пределы конкретных функций.

Пример 1.1. $P = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin \pi x}{x-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = [x-1 = u, x = u+1] = \lim\limits_{u\to 0} \frac{-\sin \pi u}{u} = [\sin \pi u \sim \pi u (u \to 0)] =$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{-\pi u}{u} = \lim_{u\to 0}(-\pi) = -\pi.$$

1.7. Бесконечно большие функции и их связь с бесконечно малыми

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}_{x_0}(\delta_0)$ точки $x = x_0$.

Определение 1.6. Функция $f(x)$ называется бесконечно большой функцией (ББФ) при $x \to x_0$, если для всякого $R > 0$ существует число $\delta = \delta(R) > 0$ такое, что

$$(\forall x)(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > R).$$

При этом пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

Заметим, что ∞ – это не число, а символ, поэтому бесконечный предел – это всего лишь обозначение бесконечно большой функции. Тем не менее при вычислениях удобно относиться к бесконечному пределу как к обычному, хотя для бесконечных пределов и существуют свои правила действий, несколько отличные от правил действий над конечными пределами (см. ниже свойства $10^0 - 13^0$).

Если функция $f(x)$ сохраняет знак в некоторой проколотой окрестности точки $x = x_0$ и является при этом бесконечно большой функцией, то естественно писать

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \ \ (\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty)$$

(в зависимости от знака функции $f(x)$ в указанной окрестности). Более точно:

$$(\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty) \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall R > 0 \exists \delta = \delta(R) > 0 :$$

$$(\forall x)(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > R)),$$

$$(\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty) \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall R > 0 \exists \delta = \delta(R) > 0 :$$

$$(\forall x)(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -R)).$$

В этих определениях и определении 5 фигурирует окрестность

$$\dot{U}_{x_0}(\delta) = \{x : 0 < |x - x_0| < \delta\} \subset \dot{U}_{x_0}(\delta_0)$$

конечной предельной точки $x_0 (x_0 \neq \infty)$. Почти дословно определяются бесконечно большие функции на бесконечности. В этом случае под точкой $x = x_0$ следует понимать один из символов: $\infty, -\infty, +\infty$, а под окрестностью $\dot{U}_{x_0}(\delta)$ – окрестность соответствующей бесконечно удаленной точки x_0. Например,

$$(\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty) \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall R > 0 \exists M = M(R) > 0 :$$

$$(\forall x)(x > M \Rightarrow f(x) < -R)).$$

Нетрудно доказать следующее утверждение.

Теорема 1.7. *Пусть функция $\alpha(x)$ не обращается в нуль в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}_{x_0}(\delta)$ точки $x = x_0$. Тогда справедливо высказывание*

$$(\alpha(x) = o(1)(x \to x_0)) \Leftrightarrow \left(f(x) = \frac{1}{\alpha\,(x)} - \text{ББФ}\ \ (x \to x_0)\right).$$

Иначе говоря, для того чтобы функция $\alpha(x)$ была бесконечно малой при $x \to x_0$, необходимо и достаточно, чтобы обратная к ней по величине функция $f(x) = 1/\alpha(x)$ была бесконечно большой при $x \to \to x_0$.

Используя эту теорему, можно доказать истинность следующих операций над бесконечно большими функциями:

$$10^0)(\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \wedge \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \infty);$$

$$11^0)(\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty(-\infty) \wedge \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty(-\infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty(-\infty);$$

$$12^0)(\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty(-\infty) \wedge \lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty(+\infty)) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)] = +\infty(-\infty));$$

$$13^0)(\lim_{x\to x_0} f\,(x) = P^{\neq 0}_{\neq\infty} \wedge \alpha(x) = o(1)(x\to x_0) \wedge \alpha(x)\neq 0 \forall x\in \dot{U}_{x_0}(\delta_0)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f(x)}{\alpha(x)} - \text{ББФ}\,(x\to x_0)\right).$$

И, наконец, отметим ещё ряд свойств, связанных с пределами функций.

Теорема 1.8 (о пределе промежуточной функции)**.** *Пусть в некоторой окрестности $\dot{U}_{x_0}(\delta)$ точки $x = x_0$ выполняются неравенства $\varphi\,(x) \le f\,(x) \le \psi\,(x)$ и пусть, кроме того, крайние функции имеют пределы в точке $x = x_0$ и эти пределы равны друг другу, т.е.*

$$\lim_{x\to x_0}\varphi\,(x) = \lim_{x\to x_0}\psi\,(x) = P.$$

Тогда существует предел промежуточной функции и он равен P, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0} f\,(x) = P$.

Теорема 1.9. *Пусть в некоторой окрестности $\dot{U}_{x_0}(\delta)$ точки $x = x_0$ выполняются неравенства $\varphi\,(x) \le f\,(x)$ и пусть существуют пределы*

$$\lim_{x\to x_0}\varphi\,(x) = P_1, \lim_{x\to x_0} f\,(x) = P_2.$$

Тогда $P_1 \le P_2$ (докажите это утверждение самостоятельно).

Теорема 1.10 (о знаке предела)**.** *Если в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}_{x_0}(\delta)$ функция $f\,(x)$ неотрицательна (неположительна) и существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f\,(x) = P$, то $P \ge 0$ (соответственно $P \le 0$).*

В тех случаях, когда при вычислении того или иного предела непосредственный переход к пределу при $x \to x_0$ приводит к одному из символов типа

$$\infty - \infty, 0\cdot\infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0^0, \infty^0, 1^\infty,$$

возникает ситуация, в которой становятся неприменимы теоремы об арифметических действиях над пределами. В таких случаях возникает *неопределенность* при решении вопроса о существовании предела или его величины. Эта неопределенность может быть снята после некоторых тождественных преобразований. В этом случае говорят, что тождественные преобразования приводят к *раскрытию неопределенности.* Поясним сказанное примером.

Пусть требуется вычислить предел $P = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cdot\sin x}{\operatorname{tg}^2 x}$. Если в указанном отношении мы сразу же перейдем к пределу, то получим неопределенность типа $0/0$. Что скрывается под этим символом, мы пока не знаем. Попробуем избавиться от неопределенности. Применим для этого таблицу 1.1 эквивалентных бесконечно малых и теорему 1.5. Получим

$$P = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\sin x}{\operatorname{tg}^2 x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot x}{x^2} \underset{x\to 0}{=} \lim 1 = 1$$

Для усвоения изложенной теории рекомендуем выполнить задачи из типового расчета "Пределы," помещённого в конце пособия.

Лекция 2. Односторонние пределы функции в точке. Непрерывность функции. Разрывные функции и классификация точек разрыва. Производная функции, ее геометрический и физический смысл. Производная сложной функции. Таблица производных

2.1. Односторонние пределы

Дадим их кратко.

Определение 2.0. ***Левый предел*** *функции* $f(x)$ *в точке* $x = x_0$ *(обозначение:* $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \equiv f(x_0-0)$*)* :

$$\left(f(x_0-0) \overset{def}{=} \lim_{x\to x_0 (x<x_0)} f(x) = A\right) \Leftrightarrow$$

$$(\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \, (\forall x)\, (x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - P| < \varepsilon)) \, .$$

Правый предел *функции* $f(x)$ *в точке* $x = x_0$ *(обозначение:* $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \equiv f(x_0+0)$*)* :

$$\left(f(x_0+0) \overset{def}{=} \lim_{x\to x_0 (x>x_0)} f(x) = A\right) \Leftrightarrow$$

$$(\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \, (\forall x)\, (x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - P| < \varepsilon)) \, .$$

Очевидно следующее свойство:

1^0) *Для существования обычного предела* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = P$ *необходимо и достаточно, чтобы существовали односторонние пределы* $f(x_0 \pm 0)$ *и чтобы имело место равенство*

$$f(x_0-0) = f(x_0+0) = P.$$

2.2. Непрерывность функции в точке

Пусть функция $f(x)$ определена в точке $x = x_0$ и некоторой ее окрестности.

Определение 2.1. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x = x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, т.е. если

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : (\forall x)\left(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\right).$

Функция $f(x)$ называется *непрерывной слева (справа) в точке* $x = x_0$, *если* $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ *(соответственно* $f(x_0 + 0) = f(x_0)$ *).*

Функция $f(x)$ называется *непрерывной на множестве* A если она непрерывна в каждой точке $x_0 \in A$ этого множества.

Очевидны следующие высказывания.

2^0) $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$ тогда и только тогда, когда $f(x) = f(x_0) + o(1)\,(x \to x_0)$. [1]

3^0) *Для того чтобы функция* $f(x)$ *была непрерывна в точке* $x = x_0$, *необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывна слева и справа в точке* $x = x_0$.

Нетрудно показать, *что сумма, разность и произведение двух функций, непрерывных в точке* $x = x_0$, *также являются непрерывными в этой точке функциями. Частное* $f(x)/g(x)$ *двух непрерывных в точке* $x = x_0$ *функций непрерывно в этой точке, если* $g(x_0) \neq 0$.

С непрерывными функциями связаны следующие два важных утверждения.

Теорема 2.1. *Пусть сложная функция* $f(\varphi(x))$ *определена в некоторой проколотой окрестности точки* $x = x_0$ *и пусть выполнены условия:*

а) существует $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = u_0$,

б) функция $f(u)$ *непрерывна в точке* $u = u_0$.

Тогда существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x))$ *и имеет место равенство*

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = f\left(\lim_{x\to x_0} \varphi(x)\right) = f(u_0).$$

[1]Это равенство называется асимптотическим разложением непрерывной в точке $x = x_0$ функции.

Теорема 2.2. *Пусть сложная функция* $f(\varphi(x))$ *определена в точке* $x = x_0$ *и некоторой ее окрестности и пусть выполнены условия:*

а) функция $u = \varphi(x)$ *непрерывна в точке* $x = x_0$*,*

б) функция $f(u)$ *непрерывна в соответствующей точке* $u = u_0 = \varphi(x_0)$*.*

Тогда сложная функция $F(x) = f(\varphi(x))$ *непрерывна в точке* $x = x_0$*.*

Теорему 2.1 называют теоремой *о переходе к пределу под знаком непрерывной функции,* а теорему 2.2 – теоремой *о непрерывности сложной функции.*

Пример 1.1. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\cos(\sin x/x) = P$.

Решение. Так как существует $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x/x) = 1$, а функция $\cos u$ непрерывна в точке $u = 1$, то по теореме 2.1 имеем

$$\lim_{x\to 0}\cos(\sin x/x) = \cos\left(\lim_{x\to 0}\sin x/x\right) = \cos 1\ .$$

Определение 2.3. Функции вида

$$c = \mathrm{const}, \sqrt[n]{x}, x^{\alpha}\,(\alpha\in R)\,, a^x, \log_a x\,(a>0, a\neq 1)\,, \sin x, \cos x,$$

$$\mathrm{arcsin}x, \mathrm{arccos}x, \mathrm{arctg}x, \mathrm{arcctg}x$$

называются *простейшими элементарными функциями.* Всякая функция, полученная из простейших элементарных функций путем применения к ним *конечного числа операций* сложения, вычитания, умножения, деления и взятия функций от функций (т.е. образования сложных функций) называется *элементарной функцией (общего вида).*

Имеет место следующая замечательная теорема.

Теорема 2.3. *Всякая элементарная функция* $f(x)$ *непрерывна в любой внутренней точке своей области определения* $D = D(f)$*.*

Напомним, что точка $x = x_0$ называется *внутренней точкой множества* D, если она входит в D вместе с некоторой своей окрестностью $U_{x_0}(\delta)$.

Например, функция $f(x) = \frac{\ln\left(\sqrt{x+1}\right)}{x-1}$ непрерывна на множестве $D = (x > -1, x \neq 1)$, так как это множество является областью определения функции $f(x)$ и все точки этого множества – внутренние.

Если хотя бы одно из условий определения 2.1 не выполнено, то функция $f(x)$ называется *разрывной в точке* $x = x_0$. Различают два типа разрывов:

Точка $x = x_0$ **– точка *разрыва I рода,*** если:

а) существуют $f(x_0)$ и конечные односторонние пределы $f(x_0 \pm 0)$, но либо они не совпадают, либо хотя бы один из них не равен значению $f(x_0)$;

б) существуют конечные односторонние пределы $f(x_0 \pm 0)$, но $f(x)$ не определена в точке $x = x_0$.

Точка $x = x_0$ **– точка *разрыва II рода:*** если либо не существует хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0 \pm 0)$, либо хотя бы один из них равен бесконечности.

Например, точка $x = 0$ – точка разрыва I рода для функций

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad g(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, x > 0, \\ -1, x < 0, \end{cases}$$

а для функции $f(x) = \sin 1/x$ она является точкой разрыва II рода.

Если $\lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = \pm\infty$, то прямая $x = x_0$ – *вертикальная асимптота для функции* $y=f(x)$. Прямая $y = kx + b$ *называется наклонной (горизонтальной при* $k = 0$*) асимптотой функцииу* $= f(x)$, если $\lim\limits_{x \to \pm\infty} |f(x) - (kx + b)| = 0$. Нетрудно показать, что если существуют конечные пределы

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \; b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx),$$

то прямая $y = kx + b$ – асимптота кривой $y = f(x)$. Таким образом, асимптоты функции $y = f(x)$ могут возникнуть при подходе x к точкам разрыва $x = x_0$ второго рода этой функции либо на бесконечности.

Рекомендуем ответить на теоретические вопросы и теоретические упражнения, касающиеся изложенной выше темы, в типовом расчёте “Пределы.”

2.3. Производная функции в точке, ее геометрический и механический смысл

На рисунке 2.1 изображены график функции $y = f(x)$, точки $M_0(x_0, f(x_0))$, $M(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$, M_0M – секущая, M_0N – касательная к кривой $y = f(x)$, углы $\alpha = \left(\overrightarrow{M_0N}, ^\wedge \overrightarrow{Ox}\right)$, $\beta = \beta(\Delta x) = \left(\overrightarrow{M_0M}, ^\wedge \overrightarrow{Ox}\right)$. Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке $x = x_0$ и некоторой ее окрестности U_{x_0}.

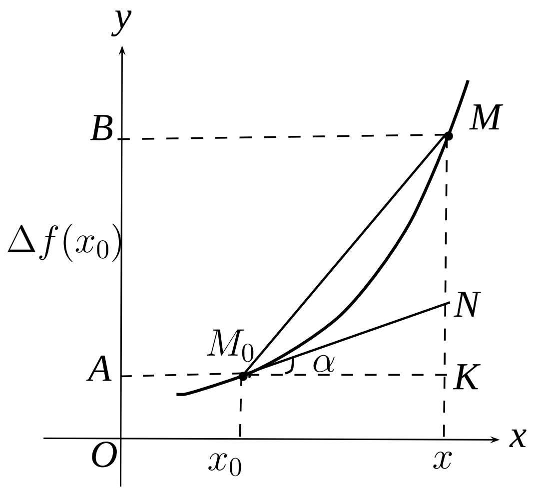


Рис. 2.1

Сместимся из точки x_0 в точку x. Величина $\Delta x = x - x_0$ называется *приращением аргумента в точке* $x = x_0$, а величина $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \equiv \Delta f(x_0)$ *называется приращением функции* $y = f(x)$ *в точке* $x = x_0$ (соответствующим приращению Δx аргумента).

Определение 2.4. Если существует (конечный) предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

то его называют *производной функции* $f(x)$ *в точке* $x = x_0$ и обозначают $f'(x_0) \equiv \frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$. При этом функцию $f(x)$ называют *дифференцируемой в точке* $x = x_0$, а величину $dy \equiv df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x \equiv \equiv f'(x_0) \cdot dx$ называют *дифференциалом функции* $f(x)$ *в точке* $x = x_0$.

Выясним, в чем состоит геометрический смысл производной и дифференциала. Так как $\operatorname{tg} \beta(\Delta x) = \frac{MK}{M_0K} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ и так как $\beta(\Delta x) \to \alpha$, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha$, т.е. $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, значит, *производная функции* $f(x)$ *в точке* $x = x_0$ *является угловым коэффициентом касательной к кривой* $y = f(x)$ *с точкой касания* $M_0(x_0, f(x_0))$.

С другой стороны, из рисунка видно,что $NK = M_0K \cdot \operatorname{tg}\alpha = \Delta x \times \times f'(x_0) = df(x_0)$, поэтому

дифференциал $df(x_0)$ *равен приращению касательной* M_0N *к графику функции* $y = f(x)$ *при переходе аргумента из точки* x_0 *в точку* $x_0 + \Delta x$.

Используя геометрический смысл производной легко получить уравнения касательной и нормали к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$:

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (*касательная*),

$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ (здесь $f'(x_0) \neq 0$), $x = x_0$ ($f'(x_0) = 0$) (*нормаль*).

Выясним теперь механический смысл производной. Если $S = S(t)$ – путь пройденный материальной точкой за время от момента t_0 до момента $t_0 + \Delta t$, то $\frac{\Delta S(t_0)}{\Delta t}$– средняя скорость материальной точки, а величина

$v(t_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S(t_0)}{\Delta t} = S'(t_0)$ – *мгновенная скорость материальной точки в момент* $t = t_0$.

Нетрудно показать, что

4^0) *любая дифференцируемая в точке* $x = x_0$ *функция* $f(x)$ *непрерывна в точке* $x = x_0$ (обратное, вообще говоря, неверно; пример: $f(x) = |x|$ – непрерывна в точке $x = 0$, но $f'(0)$ не существует).

2.4. Арифметические действия над производными

Теорема 2.4. *Если функции* $u = u(x)$, $v = v(x)$ *дифференцируемы в точке* x, *то в этой точке дифференцируемы и функции* $u(x) \pm v(x)$, $u(x) \cdot v(x)$, *причем*

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \ (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

в рассматриваемой точке x .

Если, кроме того, $v(x) \neq 0,$ *то в точке* x *дифференцируемо и частное, причем*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$

Доказательство проведем для производной суммы. Имеем

$$\begin{aligned}
&\Delta\left(u(x) + v(x)\right) \equiv \left(u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x)\right) - \left(u(x) + v(x)\right) = \\
&= \left(u(x+\Delta x) - u(x)\right) + \left(v(x+\Delta x) - v(x)\right) = \\
&= \Delta u(x) + \Delta v(x),
\end{aligned}$$

поэтому

$$\frac{\Delta\left(u(x) + v(x)\right)}{\Delta x} = \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta v(x)}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\left(u(x) + v(x)\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v(x)}{\Delta x} = u'(x) + v'(x).$$

Теорема доказана.

2.5. Производная сложной и обратной функций и функции, заданной параметрически

Приведем без доказательства некоторые утверждения, связанные с производными.

Теорема 2.5. *Пусть сложная функция* $y = f(g(x))$ *определена в точке* x *и некоторой ее окрестности и пусть выполнены условия:*

1. функция $u = g(x)$ *дифференцируема в точке* x,

2. функция $y = f(u)$ *дифференцируема в соответствующей точке* $u = g(x)$.

Тогда сложная функция $y = f(g(x))$ *дифференцируема в точке* x *и имеет место равенство*

$$\left(f(g(x))\right)' = f'(u)\big|_{u=g(x)} \cdot g'(x).$$

Напомним некоторые понятия.

а) Функция $y = f(x) : A \to f(A)$ называется *обратимой на множестве* A, если

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_1)).$$

При этом функция $x = g(y) : f(A) \to A$, сопоставляющая каждому $y \in f(A)$ элемент $x \in A$ такой, что $f(x) = y$, называется функцией, *обратной к* $f(x)$.

Очевидно, имеют место тождества:

$$f(g(y)) \equiv y\ (\forall y \in f(A));\ g(f(x)) \equiv x\,(\forall x \in A).$$

Заметим, что все строго монотонные на множестве A функции обратимы на A.

б) Говорят, что функция $y = f(x)$ *задана параметрически уравнениями* $x = x(t), y = y(t)$ $(a \leq x \leq b)$, *если функция* $x = x(t)$ *обратима на отрезке* $[a, b]$. В этом случае $f(x) \equiv y(g(x))$, где $t = g(x)$ – функция, обратная к функции $x = x(t)$.

Теорема 2.6. *Пусть функция* $y = f(x)$ *в некоторой окрестности точки* $x = x_0$ *имеет обратную функцию* $x = g(y)$. *Пусть, кроме того, функция* $f(x)$ *дифференцируема в точке* $x = x_0$ *и* $f'(x_0) \neq 0$. *Тогда обратная функция* $x = g(y)$ *дифференцируема в соответствующей точке* $y = y_0 = f(x_0)$ *и имеет место равенство* $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Теорема 2.7. *Пусть* функция $y = f(x)$ *задана параметрически уравнениями* $x = x(t), y = y(t)$ $(a \leq x \leq b)$ *и пусть выполнены условия:*

1) функции $x = x(t), y = y(t)$ *дифференцируемы в фиксированной точке* $t \in [a, b]$;

2) $x'(t) \neq 0$ *в рассматриваемой точке* t.

Тогда функция $y = f(x)$ *дифференцируема в точке* t *и имеет место равенство*

$$f'(x)\,|_{x=x(t)} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \Leftrightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

2.6. Производные простейших элементарных функций

Используя определение 2.4 производной, а также теоремы 2.6 и 2.7, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2.8. *В области определения соответствующих функций имеют место формулы:*

Таблица 2.1 производных

1) $(C)^{'} = 0 \ (C = \text{const.})\,;$

2) $(a^x)^{'} = a^x \cdot \ln a \quad \left(a^{>0}_{\neq 1} = \text{const.}\right), \ (e^x)^{'} = e^x;$

3) $(x^\alpha)^{'} = \alpha x^{\alpha-1} \ \ (\alpha = \text{const.})\,;$

4) $(\ln|x|)^{'} = \dfrac{1}{x} \ \ (x \neq 0)\,;$

5) $(\sin x)^{'} = \cos x, \ (\cos x)^{'} = -\sin x, \ (\operatorname{tg} x)^{'} = \dfrac{1}{\cos^2 x},$

$(\operatorname{ctg} x)^{'} = -\dfrac{1}{\sin^2 x};$

6) $(\arcsin x)^{'} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ (\arccos x)^{'} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},$

$(\operatorname{arctg} x)^{'} = \dfrac{1}{1+x^2}, \ (\operatorname{arcctg} x)^{'} = -\dfrac{1}{1+x^2};$

7) $(\operatorname{sh} x)^{'} \equiv \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^{'} = \operatorname{ch} x, \ (\operatorname{ch} x)^{'} \equiv \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^{'} = \operatorname{sh} x,$

$(\operatorname{th} x)^{'} \equiv \left(\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)^{'} = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$

И, наконец, рассмотрим пример вычисления производной сложной функции, состоящей из многих звеньев:

$$\left(\operatorname{arctg}^2(\ln\ (\sin(3x+2)))\right)^{'} = 2\operatorname{arctg}(\ln\ (\sin(3x+2))) \cdot \tfrac{1}{1+(\ln\ (\sin(3x+2)))^2} \times$$
$$\times \tfrac{1}{\sin(3x+2)} \cdot \cos\,(3x+2) \cdot 3.$$

Лекция 3. Логарифмическая производная. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора с остаточными членами в форме Лагранжа и Пеано. Формулы Маклорена – Тейлора для простейших элементарных функций. Правило Лопиталя. Применение формулы Тейлора

3.1. Логарифмическая производная

При дифференцировании показательно-степенной функции $y = [u(x)]^{v(x)}$ обычно используют *логарифмическую производную* $(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$. Делается это так:

$$y = [u(x)]^{v(x)} \equiv e^{\ln[u(x)]^{v(x)}} = e^{v(x)\ln[u(x)]} \Leftrightarrow y' = \left(e^{v(x)\ln[u(x)]}\right)' =$$
$$= e^{v(x)\ln[u(x)]} \cdot (v(x)\ln[u(x)])' = [u(x)]^{v(x)} \cdot \left(v'(x)\ln[u(x)] + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}\right).$$

Например, $\left(\left(x^2+1\right)^{x^3}\right)' = \left(e^{x^3\ln\left(x^2+1\right)}\right)' = e^{x^3\ln\left(x^2+1\right)} \times \left(x^3\ln\left(x^2+1\right)\right)' = \left(x^2+1\right)^{x^3} \cdot \left(3x^2\ln\left(x^2+1\right) + x^3 \cdot \frac{2x}{x^2+1}\right)$.

3.2. Производные и дифференциалы высших порядков

Производная $f'(x)$ сама является функцией от x, поэтому можно взять от нее производную. Полученная таким образом функция (если она существует) называется второй производной от функции $y = f(x)$ и обозначается $f''(x) \equiv (f'(x))' = y''_{xx}(x)$. И вообще:

если известна производная $(n-1)$-го порядка $f^{(n-1)}(x)$, то производная n-го порядка определяется так: $f^{(n)}(x) \equiv \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$. При этом функция $y = f(x)$ называется n раз дифференцируемой в точке x.

Аналогично определяются дифференциалы высшего порядка. Именно: *если известен дифференциал $d^{n-1}f(x)$ $(n-1)$-го порядка то дифференциал n-го порядка определяется так: $d^n f(x) = d\left(d^{n-1}f(x)\right)$; при* *этом дифференциал* $dx = \Delta x$ *независимой переменной и все его степени* $(dx)^k \equiv dx^k$ *считаются постоянными дифференцирования.*

Имеем $d^2y = d\,(dy) = d\,(f'\,(x)\,dx) = (f'\,(x))' \cdot dx \cdot dx = f''\,(x)\,dx^2$. И вообще, справедливо утверждение: *если функция* $y = f\,(x)$ *дифференцируема* n *раз в точке* x, *то*

$$d^n y = f^{(n)}\,(x)\,dx^n.$$

Нетрудно доказать следующее утверждение.

Теорема 3.1. *В области определения выписанных ниже функций справедливы равенства:*

$$\boxed{\begin{array}{l} 1^0)\ \ (x^\alpha)^{(n)} = \alpha\,(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\,x^{\alpha-n}\ \ (\alpha = \text{const.})\,, \\ 2^0)\ (a^x)^{(n)} = (\ln^n a)\cdot a^x\ \ \left(a_{\neq 1}^{>0} = \text{const.}\right),\ \ (e^x)^{(n)} = e^x, \\ 3^0)\ \ (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ \ (\cos\,x)^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right). \end{array}}$$

Производные n-го порядка являются линейными операциями, т.е.

$$(C_1 u\,(x) + C_2 v\,(x))^{(n)} = C_1 u^{(n)}\,(x) + C_2 v^{(n)}\,(x)\ \ \ (C_1, C_2 = \text{const.})\,.$$

Производная n-го порядка для произведения uv вычисляется довольно сложно.

Формула Лейбница. *Если функции* $u = u\,(x)\,,\ v = v\,(x)$ *дифференцируемы* n *раз в точке* x, *то имеет место равенство*

$$\begin{aligned} (uv)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} = \\ &= u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + \ldots + C_n^{n-1}u'v^{(n-1)} + uv^{(n)}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь: $C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)\ldots3\cdot2\cdot1}$ – *число сочетаний*[2] *из* n *элементов по* k, *нулевая производная функции* $g\,(x)$ *совпадает с ней самой:* $g^{(0)} \equiv\ \equiv g\,(x)\,.$

[2]Полезно знать, что $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Легко видеть, что формула (3.1) напоминает формулу бинома Ньютона; только в ней вместо произведения степеней $u^m v^n$ стоит произведение производных $u^{(m)} v^{(n)}$. Учитывая это, легко записать, например, третью производную от произведения:

$$(uv)''' = [(u+v)^3 = u^3 v^0 + 3u^2 v^1 + 3u^1 v^2 + u^0 v^3] = u''' v + 3u'' v' + 3u' v'' + uv'''.$$

3.3. Формула Тейлора с остаточными членами в форме Пеано и Лагранжа

При вычислении пределов функций мы использовали таблицу эквивалентных бесконечно малых. Например, при вычислении предела $\lim\limits_{x \to 0} (\sin x / \operatorname{tg} x)$ мы использовали формулы $\sin x \sim x$, $\operatorname{tg} x \sim x$. Однако этих формул не достаточно для вычисления предела

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}. \tag{3.2}$$

Нужны более точные формулы или так называемые *асимптотические разложения высших порядков.* Переходя к описанию таких разложений, введем следующее понятие.

Определение 3.1. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки $x = x_0$. Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ *асимптотическое разложение n-го порядка,* если существуют числа A_j $\left(j = \overline{0, n}\right)$ такие, что $f(x)$ в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}_{x_0}(\delta)$ представляется в виде

$$f(x) = A_0 + A_1 (x - x_0) + \ldots + A_n (x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right). \tag{3.3}$$

Здесь $o\left((x - x_0)^n\right) = (x - x_0)^n \cdot o(1)$ $(x \to x_0)$.

Равенство (3.3) означает, что функция $f(x)$ аппроксимируется в некоторой малой окрестности точки $x = x_0$ многочленом (с точностью до $o\left((x - x_0)^n\right)$). В каком случае функция $f(x)$ имеет асимптотическое разложение n-го порядка? Ответ на этот вопрос содержится в следующем утверждении.

Теорема 3.2. *Пусть функция $f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ производные* $f^{(0)}(x_0)$
$f(x_0), f'(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ *до n-го порядка включительно. Тогда* $f(x)$

имеет в точке $x = x_0$ *асимптотическое разложение* n*-го порядка вида*

$$\begin{gathered} f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right) \equiv \\ \equiv f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \\ + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right) \ (x \to x_0) \end{gathered} \tag{3.4}$$

(формулу (3.4) называют *формулой Тейлора с остаточным членом* $o\left((x-x_0)^n\right)$ *в форме Пеано или локальной формулой Тейлора).*

Если в (3.4) положить $x_0 = 0$, то получим формулу $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n)$ называемую *формулой Маклорена-Тейлора.* Приведем формулы Маклорена-Тейлора для основных элементарных функций.

Теорема 3.3. *Имеют место следующие разложения:*

1. $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \equiv 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \ (x \to 0),$
2. $\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \equiv$
$\equiv x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \ (x \to 0),$
3. $\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n}\right) \equiv$
$\equiv 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right) \ (x \to 0),$
4. $\ln\,(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \equiv$
$\equiv x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \ (x \to 0),$
5. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \ldots + \frac{(\alpha-n+1)x^n}{n!} +$
$+ o(x^n) \ (x \to 0, \, \alpha = \mathrm{const}).$

Доказательство этих формул базируется на подсчёте производной n-го порядка соответствующей функции. Докажем, например, формулу 2.

Итак, пусть $f(x) = \sin x$. По теореме 3.1 имеем

$$\begin{gathered} f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \tfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f(0) = 0, \; f'(0) = \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 1, \\ f''(0) = \sin\left(2 \cdot \tfrac{\pi}{2}\right) = 0, \\ f'''(0) = \sin\left(3 \cdot \tfrac{\pi}{2}\right) = -1, \ldots, \\ f^{(n)}(0) = \sin\left(n \cdot \tfrac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, \; n = 2k, \\ \cos \pi k = (-1)^k, \; n = 2k+1. \end{cases} \end{gathered}$$

Значит, в формуле

$$f(x)=\sum_{r=0}^{n}\frac{f^{(r)}(0)}{r!}x^r+o(x^n)\ =\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k}+\frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right)+$$
$$+o\left(x^{2n+1}\right)$$

будут отсутствовать все четные степени x, а слагаемые с нечетными степенями $\frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}x^{2k+1}$ имеют вид $\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Следовательно имеет место формула 2.

Замечание 3.1. В формуле 2 остаточный член можно записать в виде $o\left(x^{2n+2}\right)$, а в формуле 3 – в виде $o\left(x^{2n+1}\right)$ (почему?).

Теорема 3.2 аппроксимирует функцию $f(x)$ лишь в достаточно малой окрестности точки $x=x_0$. Условия представления функции $f(x)$ на некотором отрезке $[x_0-h,x_0+h]$ (где $h>0$ может быть достаточно большим) по формуле Тейлора описаны в следующем утверждении.

Теорема 3.4. *Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) $f(x), f'(x), ..., f^{(n)}(x)$ *существуют и непрерывны на отрезке* $[x_0-h,x_0+h]$;

2) *производная* $f^{(n+1)}(x)$ *существует и конечна по-крайней мере на интервале* (x_0-h,x_0+h).

Тогда для всех $x\in[x_0-h,x_0+h]$ функция $f(x)$ представляется в виде

$$\begin{aligned}&f(x)=\textstyle\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\equiv\\&\equiv f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\\&+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\end{aligned}\qquad(3.5)$$

где точка $x=c$ находится между точками x_0 и x $(c=x_0+\theta\cdot(x-x_0)\,,\ 0<\theta<$

Формулу (3.5) называют (*глобальной*) *формулой Тейлора с остаточным членом* $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ *в форме Лагранжа.*

Если в формуле (3.5) положить $n=1$, то получим равенство $f(x)-$ $-f(x_0)=f'(c)(x-x_0)$, или, обозначая $x=b$, $x_0=a$, будем иметь

$$\boxed{f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)\,,\ c\in(a,b).}\qquad(3.6)$$

Эту формулу называют ***формулой Лагранжа***. Она верна в случае, *когда функция* $f(x)$ *непрерывна отрезке* $[a,b]$, *а* $f'(x)$ *существует и конечна по-крайней мере на интервале* (a,b). *Если, кроме того, выполняется условие* $f(a) = f(b)$, *то существует точка* $c \in (a,b)$ *такая, что* $f'(c) = 0$ ***(теорема Ролля)***.

3.4. Применения формулы Тейлора

а) Приближенное вычисление значений функции. Если в формуле (3.4) (или (3.5)) отбросить остаточный член, то получим приближенное значение функции

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

с точностью до модуля остаточного члена. Если величина $|x-x_0| \ll 1$, то и погрешность этого приближенного равенства будет очень малой. Например, $\sin\frac{1}{2} \approx \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{13}{32}$. При этом

$$\left|\sin\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5\right)\right| \le \left|\frac{\sin^{(6)}\left(\theta\cdot\frac{1}{2}\right)}{6!}\right|\left(\frac{1}{2}\right)^6 \le \frac{1}{2^6 6!} = \frac{1}{46080}.$$

б) Вычисление пределов. Ранее мы отметили, что при вычислении предела $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ не достаточно формулы эквивалентности $\sin\theta \sim \sim \theta\,(\theta\to 0)$, так как при использовании этой формулы не исчезает неопределенность. В таких случаях пользуются локальной формулой Тейлора (3.4), записывая в ней столько слагаемых, чтобы стало возможным ликвидировать неопределенность. В нашем примере поступаем так:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3!}+o(1)\right) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

3.5. Правило Лопиталя

Другой способ раскрытия неопределенностей типа $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ доставляет так *называемое правило Лопиталя*, к изложению которого мы переходим.

Теорема Лопиталя $\left(\frac{0}{0}\right)$. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *в некоторой проколотой окрестности* $\dot{U}_a = \{0 < |x-a| < \delta\}$ *удовлетворяют требованиям:*

1) $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны и дифференцируемы в* $\dot{U}_a$;
2) $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in \dot{U}_a$;
3) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

Если при этом существует (конечный или бесконечный) предел отношения производных: $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = P$, *то и существует равный ему предел отношения самих функций:* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = P$.

Теорема Лопиталя $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *в некоторой проколотой окрестности* $\dot{U}_a = \{0 < |x-a| < \delta\}$ *удовлетворяют требованиям:*

1) $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны и дифференцируемы в* $\dot{U}_a$;
2) $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in \dot{U}_a$;
3) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$.

Если при этом существует (конечный или бесконечный) предел отношения производных: $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = P$, *то и существует равный ему предел отношения самих функций:* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = P$.

Например, для рассмотренного выше предела имеем

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2/2}{3x^2} = \frac{1}{6}.$$

Для усвоения изложенной теории рекомендуем выполнить задачи из типового расчета “Производные,” помещённого в конце пособия.

Лекция 4. Свойства функций, непрерывных на отрезке(ограниченность, достижение наибольшего и наименьшего значений, реализация всех промежуточных значений). Свойства дифференцируемой функции: монотонность, экстремумы. Схема построения графика функции с помощью первой производной

4.1. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна в любой точке $x \in (a, b)$, а на концах $x = a$ и $x = b$ отрезка непрерывна справа и слева соответственно, т.е. $f(a + 0) = f(a)$, $f(b - 0) = f(b)$. Функции, непрерывные на отрезке, обладают рядом замечательных свойств, сформулированных ниже.

Теорема Вейерштрасса I. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке, т.е. существует постоянная $M > 0$, такая, что $|f(x)| \leq M \ (\forall x \in [a, b])$.*

Теорема Вейерштрасса II. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своих наибольшего и наименьшего значений, т.е. существуют точки $x_1, x_2 \in [a, b]$ такие, что $f(x_1) = m = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, $f(x_2) = M = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

Теорема Больцано-Коши I. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на концах этого отрезка значения разных знаков $(f(a) \cdot f(b) < 0)$, то существует хотя бы одно значение $x = x_* \in (a, b)$ такое, что $f(x_*) = 0$.*

Теорема Больцано-Коши II. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то каково бы ни было промежуточное значение $K \in [m, M]$, существует значение $x = c \in [a, b]$ такое, что $f(c) = K$.*

4.2. Монотонность функции

Напомним определение монотонных функций.

Определение 4.1. Говорят, что функция $y = f(x)$ *строго возрастает* на множестве $A \subset D(f)$, если для любых $x_1, x_2 \in A$ из неравенства $x_1 < x_2$ вытекает неравенство $f(x_1) < f(x_2.)$

Если же $(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$, то функция $y = f(x)$ называется *строго убывающей* на множестве A.

Если же из строгого неравенства $x_1 < x_2$ между аргументами вытекают нестрогое неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) \geq f(x_2))$ между значениями функции, то говорят, что $y = f(x)$ является *неубывающей* (*соответственно невозрастающей*) на множестве A.

Множество всех функций, строго возрастающих и строго убывающих, образует класс *строго монотонных функций;* невозрастающие и неубывающие функции образует класс просто *монотонных функций.*

При исследовании на монотонность функций используются выписанная ранее

Теорема Лагранжа. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и является дифференцируемой по-крайней мере в интервале (a, b), то существует точка $c \in (a, b)$ такая, что*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \tag{4.1}$$

Теорема 4.1. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и является дифференцируемой по-крайней мере в интервале (a, b). Тогда справедливы следующие высказывания:*

1. если $f'(x) > 0$ $(\forall x \in (a, b))$, то функция $f(x)$ строго возрастает на отрезке $[a, b]$;

2. если $f'(x) < 0$ $(\forall x \in (a, b))$, то функция $f(x)$ строго убывает на отрезке $[a, b]$.

Доказательство вытекает из равенства (4.1), в котором надо положить $a = x_1, b = x_2$. Действительно, если $x_1 < x_2$, а $f'(x) > 0$ $(\forall x \in (a, b))$ (тогда и $f'(c) > 0$), то (см. (4.1)) будет выполняться неравенство $f(x_1) - f(x_2) < 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Это означает, что *функция* $f(x)$ *строго возрастает на отрезке* $[a,b]$. Аналогично доказывается высказывание 2. Теорема доказана.

Замечание 4.1. Можно показать, что в случае нестрогого знака производной имеет место высказывание:

3. Для того чтобы функция $f(x)$, *удовлетворяющая условиям теоремы 4.1, была неубывающей (невозрастающей) на отрезке* $[a,b]$, *необходимо и достаточно, чтобы* $f'(x) \geq 0$ $(\forall x \in (a,b))$ *(соответственно* $f'(x) \leq 0$ $(\forall x \in (a,b))$ *).*

Например, функция $y = x^2 - x$ строго убывает на любом отрезке $[a,b] \subset \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$, так как $y' = 2x - 1 < 0$ при $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$, и эта функция строго возрастает на $[a,b] \subset \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$, так как $y' = 2x - 1 > 0$ при $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

4.3. Локальный экстремум

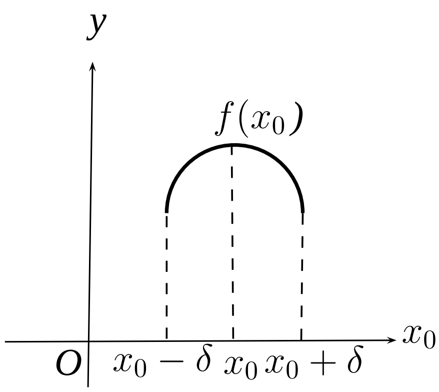


Рис. 4.1

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке $x = x_0$ и некоторой её окрестности.

Определение 4.2. Говорят, что функция $y = f(x)$ достигает в точке $x = x_0$ *локального максимума* (см. рис. 4.1), если существует $\delta > 0$ такое, что $\forall x \in U_{x_0}(\delta) \equiv \{|x - x_0| < \delta\}$ выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$. Если при указанных $x \in U_{x_0}(\delta)$ имеет место противоположное неравенство $f(x) \geq f(x_0)$, то говорят, что в точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ достигает в точке $x = x_0$ *локального минимума.*

Заметим, если неравенства $f(x) \leq f(x_0)$ или $f(x) \geq f(x_0)$ обращаются в равенство *лишь в одной точке* $x = x_0$, то говорят, что соответствующий максимум или минимум является *строгим.* Точки $x = x_0$, функция $f(x)$ достигает локального максимума или минимума, называются *точками локального экстремума* этой функции.

Замечание 4.2. Слово "локальный" здесь означает, что введенное понятие экстремума верно лишь в достаточно малой окрестности точки $x = x_0$. Иногда слово "локальный" будем опускать.

Необходимое условие экстремума. *Пусть в точке* $x = x_0$ *функция* $f(x)$ *достигает локального экстремума. Тогда либо в этой точке функция* $f(x)$ *дифференцируема и тогда* $f'(x_0) = 0$, *либо* $f(x)$ *не дифференцируема в точке* $x = x_0$.

Замечание 4.3. Точки $x = x_0 \in D(f)$ такие, что $f'(x_0)$ либо равна нулю, либо не существует (или равна ∞), называются *критическими точками* функции $f(x)$.

Если $x = x_0$ – точка локального экстремума функции $f(x)$, то она обязательно для неё критическая. Обратное утверждение, вообще говоря, не верно. Например, для функции $y = f(x) = x^3$ производная $f'(0) = 0$, но в точке $x = 0$ эта функция не имеет экстремума. Как проверить, что в критической точке достигается экстремум? Ответ на этот вопрос содержится в следующем утверждении.

Теорема 4.2 (*достаточные условия экстремума по первой производной*). *Пусть точка* $x = x_0$ *– критическая точка для функции* $f(x)$ *и функция* $f(x)$ *непрерывна в этой точке. Пусть, кроме того, производная* $f'(x)$ *существует в некоторой проколотой окрестности точки* $x = x_0$. *Тогда:*

1. если $f'(x)$ *при переходе аргумента* x *через точку* $x = x_0$ *(слева направо) изменяет знак с* $+$ *на* $-$, *то в точке* $x = x_0$ *функция* $f(x)$ *достигает локального максимума;*

2. если $f'(x)$ *при переходе аргумента* x *через точку* $x = x_0$ *(слева направо) изменяет знак с* $-$ *на* $+$, *то в точке* $x = x_0$ *функция* $f(x)$ *достигает локального минимума;*

3. если в окрестности точки $x = x_0$ *функция* $f'(x)$ *не изменяет знака, то в точке* $x = x_0$ *функция* $f(x)$ *не достигает локального экстремума.*

Доказательство. Действительно, если производная $f'(x) > 0\,(\forall x : x_0 - \delta < x$ то функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[x_0 - \delta, x_0]$, и, значит, $f(x_0) > f(x)$ для всех x из указанного отрезка. С другой стороны, так как $f'(x) < 0\,(\forall x : x_0 + \delta > x > x_0)$, то функция $f(x)$ убывает на отрезке $[x_0, x_0 + \delta]$, и, значит, снова $f(x_0) > f(x)$ для всех x из указанного отрезка. Следовательно, при всех $x \in \{|x - x_0| < \delta\}$ выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$, т.е. точка $x = x_0$ является точкой локального максимума. Аналогично доказываются утверждения 2 и 3. Теорема доказана.

Например, рассмотренная выше функция $y = x^2 - x$ имеет в точке $x = \frac{1}{2}$ минимум, так как $y' = f'(x) = 2x - 1$ при переходе через критическую точку $x = \frac{1}{2}$ изменяет знак с минуса на плюс. Другие достаточные условия экстремума, получаемые с помощью высших производных, будут даны позже. А сейчас приведем схему построения графика функции $y = f(x)$ с помощью первой производной. Сделаем это для конкретной функции $y = f(x) = x + \ln\left(x^2 - 1\right)$. Напомним сначала информацию о вычислении асимптот.

Если $\lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = \pm\infty$, то прямая $x = x_0$ – *вертикальная асимптота для функции* $y = f(x)$. Если существуют конечные пределы

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \; b = \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - kx\right],$$

то прямая $y = kx + b$ – асимптота кривой $y = f(x)$. Таким образом, асимптоты функции $y = f(x)$ могут возникнуть при подходе x к точкам разрыва $x = x_0$ второго рода этой функции либо на бесконечности.

Схема построения графика функции $y = f(x)$ ***с помощью первой производной.***

1. Находим область определения функции $f(x)$: $|x| > 1$.

2. Находим (если это возможно) нули функции и ее интервалы знакопостоянства. Этот пункт мы опускаем, так как не можем точно решить уравнение $x + \ln\left(x^2 - 1\right) = 0$ (его приближенный корень равен 1.1478).

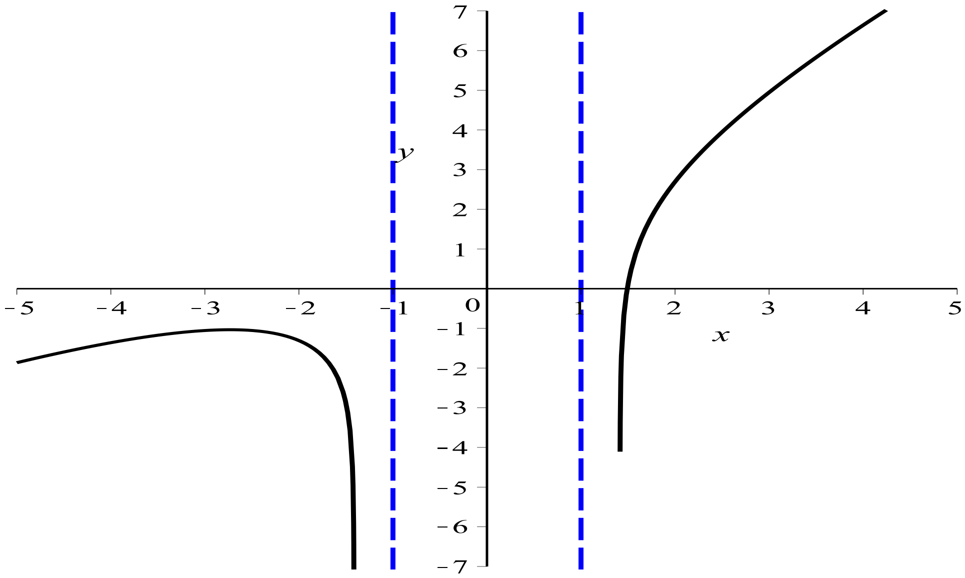
3. Находим точки разрыва функции $f(x)$ и её асимптоты.

а) вертикальные асимптоты: $x = \pm 1$, так как

$\lim\limits_{x \to -1+0} \left[x + \ln\left(x^2 - 1\right)\right] = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1-0} \left[x + \ln\left(x^2 - 1\right)\right] = +\infty$;
наклонных и горизонтальных асимптот нет, так как один из выписан-

ных ниже пределов бесконечен:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+\ln\left(x^2-1\right)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(x+\ln\left(x^2-1\right)\right)'}{x'}=$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\tfrac{2x}{x^2-1}\right)=1,$$
$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f\left(x\right)-kx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[x+\ln\ \left(x^2-1\right)-1\cdot x\right]=$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\ln\ \left(x^2-1\right)=\infty.$$



4. Находим производную и исследуем функцию $y=f\left(x\right)$ на монотонность и локальные экстремумы. Имеем

$$f'\left(x\right)=1+\tfrac{2x}{x^2-1};\ f'\left(x\right)=0,$$
$$\Leftrightarrow \tfrac{2x}{x^2-1}=-1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1-\sqrt{2},\\ x=-1+\sqrt{2}.\end{array}\right.$$

Итак, $x=-1\pm\sqrt{2}-$ критические точки. Применяя метод интервалов (с учётом ОДЗ($f(x)$)), будем иметь:

$$y' < 0 \Leftrightarrow -1 - \sqrt{2} < x < -1;$$
$$y' > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x < -1 - \sqrt{2}, \\ x > 1. \end{array} \right.$$

Значит, в точке $x = -1 - \sqrt{2}$ производная изменяет знак с плюса на минус, поэтому в этой точке функция $y = f(x)$ имеет локальный максимум, равный приближенно -0.839692795. По полученной информации строим график функции $y = f(x)$. Он будет иметь вид, указанный на рис. 4.2. Чтобы закрепить навыки, постройте график $y = (x^3 + x + 1)/(x^2 - 1)$.

4.4. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба

Пусть дана функция $y = f(x)$, дифференцируемая в точке $x = x_0$. Тогда в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ она имеет касательную, каждая точка (x, y^*) которой удовлетворяет уравнению

$$y^* = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{4.3}$$

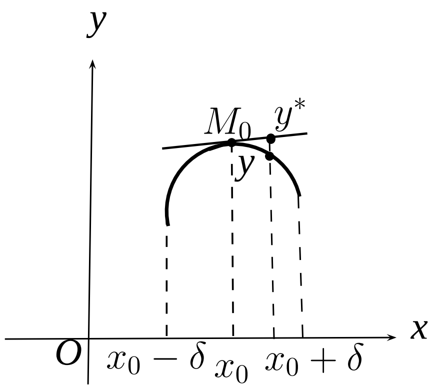


Рис. 4.3

Определение 4.3. Говорят, что кривая $y = f(x)$ *выпукла вверх в точке* $x = x_0$, если существует $\delta > 0$ такое, что в окрестности $\dot{U}_{x_0}(\delta) = \{0 < |x - x_0| < \delta\}$ кривая $y = f(x)$ находится *ниже* своей касательной (4.3) в точке M_0, т.е. если $\forall x \in \dot{U}_{x_0}(\delta) \Rightarrow y - y^* < 0$. Если же $\forall x \in \dot{U}_{x_0}(\delta) \Rightarrow y - y^* > 0$, то кривая $y = f(x)$ называется *выпуклой вниз* в точке M_0 (часто говорят, о выпуклости или вогнутости в точке $x = x_0$). Говорят, что кривая $y = f(x)$ *выпукла вверх (выпукла вниз) на интервале* (a, b), *если она выпукла вверх (выпукла вниз) в каждой точке* $x_0 \in (a, b)$ этого интервала.

На рисунке 4.3 функция $y = f(x)$ выпукла вверх в точке $x = x_0$, а на рисунке 4.4 — выпукла вниз.

Теорема 4.3. *Пусть функция* $y = f(x)$ *дважды дифференцируема на интервале* (a, b). *Тогда справедливы высказывания:*

1. если $f''(x) < 0$ $(\forall x \in (a, b))$, *то кривая* $y = f(x)$ *выпукла вверх на* (a, b);

2. если $f''(x) > 0$ $(\forall x \in (a, b))$, *то кривая* $y = f(x)$ *выпукла вниз на* (a, b).

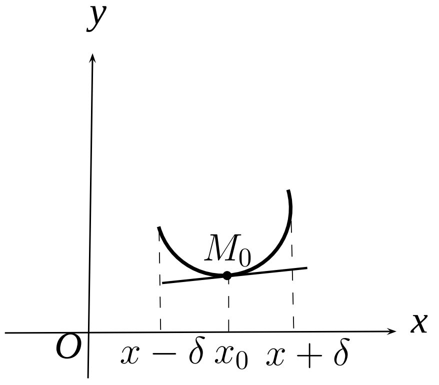


Рис. 4.4

Доказательство. Пусть $x = x_0$ – произвольная точка интервала (a, b). Окружим её отрезком $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (a, b)$.

Так как функция $y = f(x)$ удовлетворяет на этом отрезке всем условиям теоремы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, то для всех $x \in \dot{U}_{x_0}(\delta)$ имеет место представление

$$y = f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2. \qquad (4.4)$$

С другой стороны, в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ функция $y = f(x)$ имеет касательную с уравнением $y^* = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.Значит, $y - y^* = \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2$ $\left(x \in \dot{U}_{x_0}(\delta)\right)$. Отсюда видно, что если $f''(x) < 0$ $(\forall x \in (a, b))$ (тогда и $f''(c) < 0$), то $y - y^* < 0$ $\left(\forall x \in \dot{U}_{x_0}(\delta)\right)$, значит, кривая $y = f(x)$ *выпукла вверх* в точке $x = x_0$. Если же $f''(x) > 0$ $(\forall x \in (a, b))$, то то $y - y^* < 0$ $\left(\forall x \in \dot{U}_{x_0}(\delta)\right)$, значит, кривая $y = f(x)$ *выпукла вниз* в точке $x = x_0$. Теорема доказана.

Определение 4.4. Точка $x = x_0$ называется *точкой перегиба кривой* $y = f(x)$, если:

а) $f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$;

б) кривая $y = f(x)$ при переходе x через точку $x = x_0$ изменяет направление выпуклости (это равносильно тому, что разность $y - y^*$ изменяет знак при переходе x через точку $x = x_0$).

Необходимое условие точки перегиба. *Если* $x = x_0$ *- точка перегиба и если существует* $f''(x_0)$, *то* $f''(x_0) = 0$.

Доказательство вытекает из локальной формулы Тейлора и из равенства

$$y - y^* = \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right)(x \to x_0).$$

Замечание 4.4. К точкам, подозрительным на "перегиб", следует отнести, прежде всего, точки $x = x_0$, для которых $f''(x_0) = 0$. Однако "перегиб" может иметь место и в точках, в которых *вторая производная $f''(x)$ не существует или равна ∞.* Например, в точке $x = 0$ функция $f(x) = \sqrt[3]{x}$ имеет производную $y'' = -\frac{2}{9x^{5/3}}|_{x=0} = \infty$. И в этой точке эта функция имеет "перегиб". Очевиден следующий результат.

Теорема 4.4 (*достаточное условие точки перегиба*). *Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$ и некоторой её окрестности и дважды дифференцируема в некоторой проколотой окрестности этой точки. Тогда если при переходе x через точку $x = x_0$ вторая производная $f''(x)$ изменяет знак, то точка $x = x_0$ – точка перегиба кривой $y = f(x)$.*

4.5. Исследование функций с помощью высших производных

Используя локальную формулу Тейлора, можно доказать следующие утверждения.

4. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема n раз в критической точке $x = x_0$ и пусть при этом

$$f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0,\ f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда если $n = 2k$, то при $f^{(n)}(x_0) > 0$ в точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ достигает минимума; при $f^{(n)}(x_0) < 0$ функция $y = f(x)$ достигает максимума в точке $x = x_0$.

Если же $n = 2k + 1$, то в точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ не имеет локального экстремума.

5. Пусть функция $y = f(x)$ трижды дифференцируема в точке $x = x_0$ и выполнены условия: а) $f''(x_0) = 0$, б) $f'''(x_0) \neq 0$. Тогда $x = x_0$ – точка перегиба кривой $y = f(x)$.

Например, при изучении функции $y = \operatorname{ch} x + \cos x$ на экстремум в точке $x = 0$ исследовать знак производной $y' = f'(x) = \operatorname{sh} x - \sin x$ довольно сложно. Для решения этой задачи воспользуйтесь теоремой 4.4, вычислите $f''(0)$ и найдите, что в точке $x = 0$ функция достигает минимума.

Для усвоения изложенной теории рекомендуем выполнить задачи из типового расчета “Графики,” помещённого в конце пособия.

Лекция 5. Первообразная и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Таблица первообразных. Простейшие приемы интегрирования: подведение функции под знак дифференциала, выделение полного квадрата, замена переменных и интегрирование по частям в неопределенном интеграле. Определенный интеграл, его свойства и геометрический смысл

Операция, обратная дифференцированию, называется *интегрированием.* Перейдем к ее изложению.

5.1. Первообразная и неопределенный интеграл

Ниже в качестве A берется любой из промежутков: $[a,b]\,,(a,b)\,,[a,b)\,,(a,b]$ (концы a и b могут быть бесконечными).

Определение 5.1. Говорят, что функция $F(x)$ является *первообразной для функции* $f(x)$ на множестве A, если $F'(x)\equiv f(x)\ (\forall x\in A)\,.$ Разыскание всех первообразных функции $f(x)$ называется *интегрированием* $f(x)\,.$

Например, функция $F(x)=x^3$ является первообразной для $f(x)=3x^2$ на всей оси $R,$ так как $\left(x^3\right)'=3x^2\ (\forall x\in R)\,.$

Теорема 5.1(об общем виде всех первообразных данной функции). *Пусть $F(x)$ – фиксированная первообразная функции $f(x)$ (на множестве A). Тогда множество всех первообразных функции $f(x)$ (на множестве A) описывается формулой*

$$\Phi(x)=F(x)+C,$$

где C – произвольная постоянная.

Доказательство вытекает из того, что если $F(x)$ и $\Phi(x)$ – две первообразные функции $f(x)$, то $(\Phi(x)-F(x))'=f(x)-f(x)\equiv\equiv 0\ (\forall x\in A)\,,$ а, значит, разность $\Phi(x)-F(x)$ является постоянной величиной на множестве A, т.е. $\Phi(x)-F(x)=C\ \ (\forall x\in A)\,.$

Определение 5.2. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ *(на множестве A)* называется *неопределенным интегралом на A этой функции.* Обозначение: $\int f(x)\,dx$. При этом сама функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией* и если интеграл от нее существует, то говорят, что $f(x)$ *интегрируема на A*.

Из теоремы 5.1 вытекает, что $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, где $F(x)$ *— фиксированная первообразная функции $f(x)$ (на множестве A), а C — произвольная постоянная.* Отметим, что равенство $\int f(x)\,dx = F(x)+C$ равносильно равенству $F'(x) \equiv f(x)$ $(\forall x \in A)$. Таким образом, для доказательства того, что некоторая функция $\varphi(x)+C$ является неопределенным интегралом от функции $f(x)$, надо продифференцировать ее по x; если при этом будет получена подынтегральная функция $f(x)$, то равенство $\int f(x)\,dx = \varphi(x)+C$ *будет истинным.* Используя этот факт, легко докажем следующие формулы.

Таблица 5.1. Неопределенные интегралы основных функций

Везде ниже C— произвольная постоянная.
1. $\displaystyle\int 0dx = C = \text{const.}$;
2. $\displaystyle\int dx = x + C$;
3. $\displaystyle\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1 - \text{постоянная})$;
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$;
5. $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C$;
6. $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C$;
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$;
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C$;

9. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ \left(a^{>0}_{\neq 1} - \text{постоянная}\right), \ \int e^x dx = e^x + C;$
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arc\mathrm{tg}\frac{x}{a} + C \ \ (a>0 - \text{постоянная})\,;$
11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \ \ (a>0 - \text{постоянная})\,;$
12. $\displaystyle\int \mathrm{sh}\, x dx = \mathrm{ch}\, x + \, C;$
13. $\displaystyle\int \mathrm{ch}\, x dx = \mathrm{ch}\, x + \, C;$
14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\, x + C;$
15. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C;$
16. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C.$

Докажем, например, формулу 10, табл. 5.1. Дифференцируем правую часть равенства 10 по x:

$$\left(\frac{1}{a}arc\mathrm{tg}\frac{x}{a}+C\right)' = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\cdot\frac{1}{a} = \frac{1}{a^2+x^2}.$$

Получена подынтегральная функция левой части 10. Значит, равенство 10 верно. Точно так же доказываются остальные формулы этой таблицы.

Свойства неопределенного интеграла (везде ниже предполагается, что интегралы от соответствующих функций существуют):

$$1^0)\ \left(\int f\,(x)\,dx\right)' = f\,(x)\,, \quad 2^0)\ \int g'\,(x)\,dx = g\,(x) + C;$$

$$3^0)\ \int \left(C_1 f\,(x) + C_2 g\,(x)\right) dx = C_1 \int f\,(x)\,dx + C_2 \int g\,(x)\,dx$$

$$\left(C_1, C_2 = \mathrm{const}, C_1^2 + C_2^2 \neq 0\right).$$

Свойство 3^0 называют свойством *линейности интеграла.* Первые два свойства показывают, что операции дифференцирования и интегрирования взаимно обратны.

Немного позже будет установлено, что *всякая непрерывная на отрезке* $A = [a, b]$ *функция* $f(x)$ *интегрируема на этом отрезке.*

5.2. Замена переменной в неопределенном интеграле

Перейдем к формулировке теоремы о замене переменной в неопределенном интеграле, которая часто используется при вычислении интегралов. Здесь имеются в виду два утверждения[3]:

$$I.\ \int g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx \equiv \int g(\varphi(x))\,d\varphi(x) = [\varphi(x) = t] = \int g(t)\,dt\big|_{t=\varphi(x)}.$$
$$II.\ \int f(x)\,dx = [x = \psi(t), dx = \psi'(t)\,dt] = \int f(\psi(t))\,\psi'(t)\,dt\big|_{t=g(x)},$$

где $t = g(x)$ – функция, обратная к функции $x = \psi(t)$.

Теорема 5.2. *а) Пусть выполнены условия: 1) функция* $g(x)$ *непрерывна в своей области определения* D; *б) функция* $t = \varphi(x)$ *непрерывно дифференцируема на множестве* A *таком, что* $\varphi(A) \subseteq \subseteq D$. *Тогда для всех* $x \in A$ *имеет место равенство* I.

б) Пусть выполнены условия: 1) функция $f(x)$ *непрерывна в своей области определения* D;

2) функции $x = \psi(t)$ *и* $\psi'(t)$ *непрерывны на множестве* B *таком, что* $\psi(B) \subset D$;

3) $\psi'(t) \neq 0\ (\forall t \in B)$; *4) функция* $x = \psi(t)$ *имеет на множестве* B *обратную функцию* $t = g(x)$. *Тогда для всех* $x \in \psi(B)$ *имеет место равенство* II.

Замечание 5.1. Преобразования в I часто называют *процедурой введения множителя под знак дифференциала.* Формулу II удобно применять в тех случаях, когда функция $f(\psi(t))\,\psi'(t)\,dt$ легче интегрируется, чем исходная функция $f(x)$. Её применяют, например, при

[3] Здесь и всюду далее с тем, чтобы не прерывать выкладки, в квадратных скобках будем указывать соответствующие замены переменных или формулы, необходимые для преобразований исходных выражений.

вычислении интегралов от иррациональностей вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}\right)dx$, $\int R\left(x, \sqrt{ax^2\right.$ (здесь $R(u,v)$ – рациональная функция). В первом случае делается замена $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}} = t$, во втором случае подбирают такую замену $x = \psi(t)$, чтобы исчезла иррациональность. Например,

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = [x = \cos t, dx = -\sin t dt] = \int \sqrt{1-\cos^2 t}\,(-\sin t dt) = -$$

$$-\int \sin^2 t dt = -\frac{1}{2}\int (1-\cos 2t)\,dt =$$

$= -\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C$. Далее надо вернуться к старой переменной с помощью обратной функции $t = \arccos x$ и получить ответ: $\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} - -\frac{1}{2}\arccos x + C$.

5.3. *Интегрирования по частям в неопределенном интеграле*

При вычислении интегралов часто используется *операция интегрирования по частям,* смысл которой раскрывается в следующем утверждении.

Теорема 5.3. *Пусть функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ непрерывно дифференцируемы на множестве A. Тогда на этом множестве справедливо равенство*

$$\int u dv = u\cdot v - \int v du.$$

Доказательство вытекает из цепочки тождеств

$$(u\cdot v)' \equiv u'v + u\cdot v' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u\cdot v' \equiv (u\cdot v)' - u'v \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int u\cdot v'dx \equiv \int (u\cdot v)'\,dx - \int u'vdx \Leftrightarrow \int udv \equiv u\cdot v - \int vdu.$$

Замечание 5.2. Операция интегрирования по частям применяется к интегралам вида

$$1.\ \int P_m(x)\times\left[\begin{array}{c}\sin\alpha x\,dx,\\ \cos\alpha x\,dx,\\ e^{\alpha x}\,dx.\end{array}\right.\qquad 2.\ \int P_m(x)\times\left[\begin{array}{c}\arcsin xdx,\\ \arccos xdx,\\ \mathrm{arctg}\, xdx,\\ \ln xdx\end{array}\right.$$

($P_m(x)$ – многочлен степени m).

При этом в интегралах типа 1 для получения дифференциала dv надо ввести под знак дифференциала трансцендентную функцию $(\sin\alpha x, \cos\alpha x, e^{\alpha x})$, а в интегралах типа 2 под знак дифференциала надо ввести многочлен $P_m(x)$. Например,

$$\int (2x+1)\cos xdx = \int (2x+1)\,d(\sin x) = (2x+1)\sin x + 2\cos x + C;$$

$$\int x\ln xdx = \int \ln x\, d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2} d(\ln x) =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{1}{x} = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C.$$

5.4. Выделение полного квадрата

При интегрировании алгебраических дробей будет использоваться операция *выделения полного квадрата.* Продемонстрируем ее на примере интеграла

$$\int\frac{dx}{3-2x-x^2} = -\int\frac{dx}{-3+2x+x^2} =$$
$$= \left[x^2+2x-3 = (x+1)^2-4,\ x+1=t, dx=dt\right] = -\int\frac{dt}{t^2-4} =$$
$$= -\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1-2}{x+1+2}\right| + C = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + C.$$

5.5. Определенный интеграл, его свойства и геометрический смысл

Пусть функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$. Произведем разбиение (см. рис. 5.1)

$$a = x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b \qquad (\Delta)$$

отрезка $[a,b]$ на частичные отрезки $[x_i,x_{i+1}]$ и выберем произвольно точки $x_i^*\in[x_i,x_{i+1}]$ $\left(i=\overline{0,n-1}\right)$. Вычислим значения $f\left(x_i^*\right)$ и составим так называемую *интегральную сумму*

$$\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i^*\right)\Delta x_i\equiv f\left(x_0^*\right)\Delta x_0+f\left(x_1^*\right)\Delta x_1+...+f\left(x_{n-1}^*\right)\Delta x_{n-1}$$
$$\left(\Delta x_i=x_{i+1}-x_i\right).$$

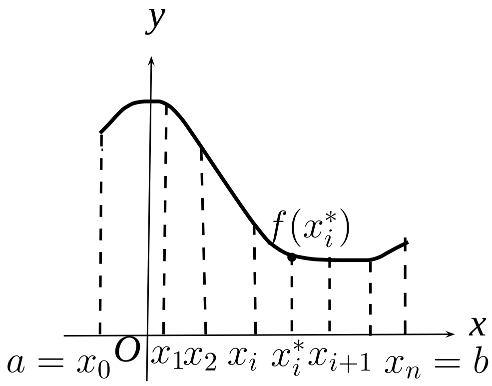


Рис. 5.1

Определение 5.3. Если существует конечный предел интегральных сумм:

$$\lim_{\lambda=\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i^*\right)\Delta x_i=I,$$

и если этот предел не зависит от вида разбиения (Δ) и выбора точек $x_i^*\in[x_i,x_{i+1}]$, то его называют *определенным интегралом от функции $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$*. Обозначение: $I=\int_a^b f(x)\,dx$. При этом саму функцию $y=f(x)$ называют *интегрируемой на отрезке* $[a,b]$ (заметим, что число $\lambda=\max\limits_{i=\overline{0,n-1}}\Delta x_i\equiv \max\limits_{i=\overline{0,n-1}}(x_{i+1}-x_1)$ называется *диаметром разбиения* (Δ)).

Пусть теперь функция $f(x)\geq 0$ $(\forall x\in[a,b])$. По разбиению (Δ) строится ступенчатая фигура (см. рис. 5.2), состоящая из прямоугольников $MPFN$ высоты $f\left(x_i^*\right)$ и длиной основания, равной Δx_i. Площадь этой ступенчатой фигуры (достройте ее самостоятельно) равна интегральной сумме $\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i^*\right)\Delta x_i$ и эта площадь будет приближенно равна площади криволинейной трапеции[4] $\pi=\{(x,y): y=f(x), a\leq x\leq b\}$, т.е. $S_\pi\approx\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i^*\right)\Delta x_i$, причем это равенство будет тем точнее, чем меньше диаметр разбиения $\lambda=\max\limits_{i=\overline{0,n-1}}\Delta x_i$, и оно становится точным при $\lambda\to 0$:

$$\boxed{S_\pi=\lim_{\lambda=\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i^*\right)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\,dx.}$$

[4]На рис. 5.2 : π – это трапеция $ACDB$, ограниченная сверху кривой $y=f(x)$, снизу – осью Ox , с боков – прямыми $x=a$ и $x=b$.

Мы пришли к следующему *геометрическому смыслу определенного интеграла: интеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$ *численно равен площади* S_π *криволинейной трапеции* $\pi = \{(x,y) : y = f(x),\ a \le x \le b\}$ *с верхней границей, описываемой уравнением* $y = f(x)$, $x \in [a,b]$.

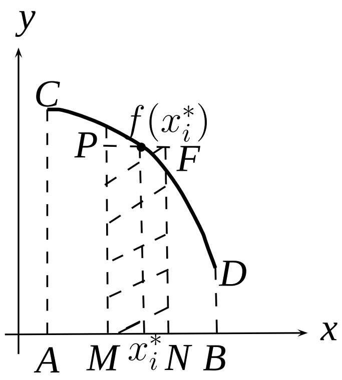


Рис. 5.2

Замечание 5.3. В определении 5.3 интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ предполагается, что отрезок интегрирования ориентирован от a до b (т.е. $a < b$). В случае противоположной ориентации отрезка $[a,b]$ (т.е. при $b < a$) полагаем по определению $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$. Также полагаем по определению, что $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Перейдем к формулировке свойств определенного интеграла.

Ограниченность подынтегральной функции. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке (т.е. $\exists M = \mathrm{const} : |f(x)| \le M\ \forall x \in [a,b]$).

Линейность интеграла. *Если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы на отрезке* $[a,b]$, *то на этом отрезке интегрируема и любая их линейная комбинация* $\alpha f(x) + \beta g(x)$ *и имеет место равенство*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx \quad (\alpha, \beta = \mathrm{const}) \ .$$

Аддитивность интеграла. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на максимальном из отрезков* $[a,b]$, $[a,c]$, $[c,b]$, *то она интегрируема и на двух других отрезках, причем имеет место равенство*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Далее везде предполагаем, что $a < b$.

Монотонность интеграла. *Если функции* $f(x)$, $g(x)$ *и* $p(x)$ *интегрируемы на отрезке* $[a,b]$ и $p(x) \le f(x) \le g(x)$ $(\forall x \in [a,b])$, то $\int_a^b p(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$.

Интегрируемость модуля. *Если функции $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке интегрируема и функция $|f(x)|$, причем имеет место неравенство*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

Теорема о среднем для интеграла. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда существует точка $c \in [a, b]$ такая, что $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$* (геометрический смысл этой теоремы состоит в том, что существует прямоугольник с основанием $[a, b]$ и высоты $f(c)$, равновеликий криволинейной трапеции π).

Доказательство. Пусть $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ (по теореме Вейерштрасса значения m и M функцией $f(x)$ достигаются). Имеем $m \le f(x) \le M\,(\forall x \in [a, b])$, поэтому из свойства монотонности интеграла отсюда получаем

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\;dx \le \int_a^b M\,dx \;\Leftrightarrow\; m\,(b-a) \int_a^b f(x)\;dx \le$$

$$\le M\,(b-a) \Leftrightarrow\; m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\;dx \le M.$$

Последние неравенства показывают, что значение $K = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\;dx$ является промежуточным для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, а, значит, по теореме Больцано–Коши существует $c \in [a, b]$ такое, что

$$f(c) = K \;\Leftrightarrow\; f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\;dx \Leftrightarrow\; \int_a^b f(x)\;dx = f(c)\,(b-a)\,.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим ещё несколько примеров, которые демонстрируют простейшие приемы интегрирования.

1. $\displaystyle\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = [\sin x = t] = \int \frac{dt}{t} = \ln|\mathrm{t}|{+}C.$

2. $$\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{d\,(\ln x)}{\ln x} = [\ln x = t] = \int \frac{dt}{t} = \ln|\mathrm{t}| + \mathrm{C} = \ln|\ln x| + C.$$

3. $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2} = \left[x = \operatorname{tg} t, dx = \frac{dt}{\cos^2 t}\right] = \int \frac{dt}{\left(1+\operatorname{tg}^2 t\right)^2 \cos^2 t} = \int \frac{dt}{\frac{1}{\cos^4 t}\cdot\cos^2 t} =$
$= \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)\, dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C = [t = \operatorname{arctg} x] =$
$= \frac{\operatorname{arctg} x}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sin(\operatorname{arctg} x)\cdot\cos(\operatorname{arctg} x) + C =$
$= \frac{\operatorname{arctg} x}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\operatorname{tg}\,(\operatorname{arctg} x)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\,(\operatorname{arctg} x)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\,(\operatorname{arctg} x)}} + C = \frac{\operatorname{arctg} x}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2} + C.$

4. $\int \operatorname{arctg} x dx = \left[\int u dv = uv - \int v du\right] = (\operatorname{arctg} x)x - \int x\cdot\frac{1}{1+x^2}dx =$
$= x\cdot\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} = x\cdot\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C.$

5. $I = \int e^{ax}\cos bx dx = \frac{1}{a}\int \cos bx\, d\left(e^{ax}\right) = \left[\int u dv = uv - \int v du\right] =$
$= \frac{1}{a}\left(e^{ax}\cos bx + b\int e^{ax}\sin\, bx dx\right) =$
$= \frac{e^{ax}\cos bx}{a} + \frac{b}{a^2}\int \sin\, bx\, de^{ax} = \frac{e^{ax}\cos bx}{a} + \frac{b}{a^2}\left(e^{ax}\sin\, bx - b\int e^{ax}\cos bx dx\right),$
$\Leftrightarrow I = \frac{e^{ax}\cos bx}{a} + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin\, bx - \frac{b^2}{a^2}I \Leftrightarrow \left(1+\frac{b^2}{a^2}\right) I = \frac{e^{ax}\cos bx}{a} + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin\, bx,$
$I = \frac{b\sin\, bx + a\cos bx}{a^2+b^2}\cdot e^{ax}.$

Лекция 6. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона – Лейбница. Замена переменных и интегрирование по частям в определенном интеграле. Интегрирование дробно-рациональных функций и тригонометрических выражений

Вычисление определенного интеграла можно свести к вычислению неопределенного. Соответствующая формула носит название формулы Ньютона—Лейбница. Для ее вывода необходимо изучить сначала свойства интеграла с переменным верхним пределом, к описанию которого мы переходим.

6.1. Интеграл с переменным верхним пределом

Заметим, что в качестве переменной интегрирования можно выбрать любую букву:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(\xi)\,d\xi = \int_a^b f(A)\,dA.$$

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Тогда для любого $x \in [a,b]$ можно вычислить число $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Значит, для каждого $x \in [a,b]$ определена функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Эту функцию называют *интегралом с переменным верхним пределом.*

Теорема 6.1. *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то интеграл $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ непрерывен на этом отрезке. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то $F(x)$ дифференцируема на указанном отрезке, причем*

$$F'(x) = f(x) \quad \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(t)\,|_{t=x} \quad (\forall x \in [a,b])\,. \qquad (6.1)$$

Доказательство первой части этого утверждения опускаем. Перейдем к обоснованию второй части. Пусть x – произвольная точка интервала (a,b). Вычислим

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} \equiv \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\int_a^{x+\Delta x} f\left(t\right)dt + \int_x^a f\left(t\right)dt}{\Delta x} = \frac{\int_x^{x+\Delta x} f\left(t\right)dt}{\Delta x}.$$

Так как $f\left(t\right)$ непрерывна на отрезке $\left[a,b\right]$, то применима теорема о среднем: существует точка $c \in \left[x, x+\Delta x\right]$, $\Delta x > 0$ ($c \in \left[x+\Delta x, x\right]$, $\Delta x < 0$) такая, что

$$\int_x^{x+\Delta x} f\left(t\right)dt = f\left(c\right)\left(x + \Delta x - x\right) = \Delta F\left(x\right).$$

Тогда $\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = f\left(c\right)$. Устремляя здесь $\Delta x \to 0$ и учитывая, что при этом $c \to x$, $f\left(c\right) \to f\left(x\right)$, будем иметь $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = f\left(x\right)$, т.е. $F'\left(x\right) = f\left(x\right)$. Равенство (6.1) показано в любой внутренней точке отрезка $\left[a,b\right]$. Можно показать, что оно верно и на концах этого отрезка. Теорема доказана.

Следствие 6.1. *Любая непрерывная на отрезке* $\left[a,b\right]$ *функция* $f\left(x\right)$ *имеет первообразную.*

Действительно, в качестве одной из первообразных можно указать интеграл $F\left(x\right) = \int_a^x f\left(t\right)dt$ с переменным верхним пределом (при этом $F'\left(x\right) = f\left(x\right)$ $\left(\forall x \in \left[a,b\right]\right)$, т.е. $F\left(x\right)$ – первообразная для $f(x)$).

6.2. Формула Ньютона—Лейбница

Докажем теперь одну из основных формул интегрального исчисления.

Теорема 6.2. *Пусть функция* $f\left(x\right)$ *непрерывна на отрезке* $\left[a,b\right]$ *и* $\Phi\left(x\right)$ – *её первообразная на отрезке* $\left[a,b\right]$. *Тогда*

$$\int_a^b f\left(x\right)dx = \Phi\left(x\right)\Big|_{x=a}^{x=b} = \Phi\left(b\right) - \Phi\left(a\right). \tag{6.2}$$

Доказательство. Так как $F\left(x\right) = \int_a^x f\left(t\right)dt$ – первообразная функции $f\left(x\right)$ на отрезке $\left[a,b\right]$, то существует постоянная C такая, что $\int_a^x f\left(t\right)dt = \Phi\left(x\right) + C$. Положим в этом равенстве $x = a$; будем иметь $0 = \Phi\left(a\right) + C \Leftrightarrow C = -\Phi\left(a\right)$. Поэтому

$$\int_a^x f(t)\,dt = \Phi(x) - \Phi(a).$$

Полагая здесь $x = b$, получаем формулу (6.2). Теорема доказана.

Например, $\int_2^3 \left(x^3+2x\right)dx = \left(\int \left(x^3+2x\right)dx\right)\Big|_{x=2}^{x=3} = \left(\frac{x^4}{4}+x^2+C\right)\Big|_2^3 = \left(\frac{3^4}{4}+3^2+C\right) - \left(\frac{2^4}{4}+2^2+C\right) = \frac{85}{4}$.

6.3. Замена переменных и интегрирование по частям в определенном интеграле

С помощью формулы Ньютона – Лейбница нетрудно доказать следующие утверждения.

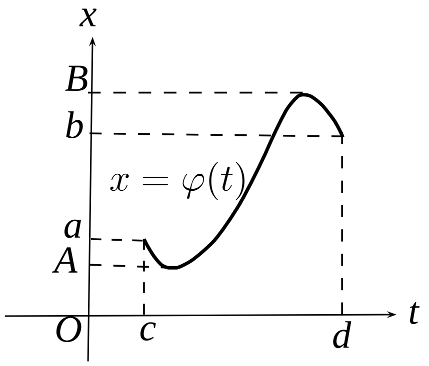


Рис. 6.1

Теорема 6.3 (см. рис. 6.1)**.** *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[A,B] \supset [a,b]$, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[c,d]$ таком, что $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$, причем $\varphi[c,d] \subset [A,B]$. Тогда имеет место формула замены переменных в определенном интеграле:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[x = \varphi(t), dx = \varphi'(t)\,dt, \varphi(c) = a, \varphi(d) = b\right] =$$

$$= \int_c^d f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Теорема 6.4. *Пусть функции $u = u(x), v = v(x)$ непрерывно-дифференцируемы на отрезке $[a,b]$. Тогда имеет место формула интегрирования по частям в определенном интеграле:*

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b v\,du.$$

6.4. Интегрирование дробно-рациональных функций

Дробно-рациональной функцией (*или алгебраической дробью*) называется функция, представимая в виде отношения двух много- членов:

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} \equiv \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_0}.$$

При этом дробь $R(x)$ называется *правильной,* если степень m ее многочлена-числителя $P_m(x)$ меньше степени n её многочлена-знаменателя $Q_n(x)$; в противном случае (т.е. в случае $m \geq n$) дробь $R(x)$ называется *неправильной.* Любую неправильную дробь можно представить в виде суммы многочлена (целой части) и правильной дроби. Для этого надо разделить числитель на знаменатель углом. Например,

$$\frac{3\,x^4 - 5\,x^2 + 2\,x - 8}{x^2 + 3\,x - 1} = 3x^2 - 9x + 25 + \frac{17 - 82x}{x^2 + 3x - 1}.$$

Определение 6.1. *Простейшими дробями типа* $I - IV$ называются следующие дроби:

$$I.\ \frac{A}{x-a};\quad II.\ \frac{A}{(x-a)^k};\quad III.\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\ \left(D = p^2 - 4q < 0\right);$$

$$IV.\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}\ \left(D = p^2 - 4q < 0\right),$$

где A, M, N, a, p, q — действительные постоянные, $k, m \geq 2$ — натуральные числа.

Теорема 6.5. *Любую правильную дробь* $R(x)$ *можно разложить в сумму простейших дробей типа* $I - IV$*. Это разложение единственно (с точностью до порядка слагаемых).*

Алгоритм разложения на простейшие дроби

Пусть требуется разложить на простейшие дроби правильную дробь $R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$.

Выполним следующие действия:

1) разложим знаменатель на множители:

$$Q_n(x) = b_0 (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{r_1} \left(x^2 + p_2 x + q_2\right)^{r_2};$$

2) каждому "линейному" множителю $(x - x_0)^k$ *поставим в соответствие сумму* k *простейших дробей типа* $I - II$:

$$\frac{A_k}{(x - x_0)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x - x_0)^{k-1}} + ... + \frac{A_1}{x - x_0},$$

а каждому "квадратичному" множителю $\left(x^2 + px + q\right)^m$ *поставим в соответствие* m *дробей типа* $III - IV$:

$$\frac{M_m x + N_m}{(x^2 + px + q)^m} + \frac{M_{m-1} x + N_{m-1}}{(x^2 + px + q)^{m-1}} + ... + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q}.$$

Сделав это для каждого множителя знаменателя $Q_n(x)$, *запишем тождество*

$$\begin{aligned}
&\tfrac{P_m(x)}{Q_n(x)} \equiv \left[\tfrac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \tfrac{A_{k_1-1}}{(x-x_1)^{k_1-1}} + ... + \tfrac{A_1}{x-x_1}\right] + \\
&+ \left[\tfrac{\hat{A}_{k_2}}{(x-x_1)^{k_2}} + \tfrac{\hat{A}_{k_2-1}}{(x-x_1)^{k_2-1}} + ... + \tfrac{\hat{A}_1}{x-x_1}\right] + \\
&+ \left[\tfrac{M_{r_1} x + N_{r_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}} + \tfrac{M_{r_1-1} x + N_{r_1-1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{r_1-1}} + ... + \tfrac{M_1 x + N_1}{x^2+p_1x+q_1}\right] + \\
&+ \left[\tfrac{\hat{M}_{r_2} x + \hat{N}_{r_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{r_2}} + \tfrac{\hat{M}_{r_2-1} x + \hat{N}_{r_2-1}}{(x^2+p_2x+q_2)^{r_2-1}} + ... + \tfrac{\hat{M}_1 x + \hat{N}_1}{x^2+p_1x+q_1}\right].
\end{aligned} \tag{6.3}$$

3) Умножив обе части этого тождества на знаменатель $Q_n(x)$, *получим тождество двух многочленов. Приравнивая в нем коэффициенты при одинаковых степенях* x^s, *получим линейную алгебраическую систему уравнений относительно неопределенных коэффициентов* $A_j, \hat{A}_j, M_j, \hat{M}_j, N_j, \hat{N}_j$, *решая которую (например, методом Гаусса), найдем эти коэффициенты. Подставляя их в (6.3), получим разложение дроби* $R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ *на простейшие дроби.*

Например, разложим дробь $R(x) = \frac{5x^3+3x^2+23x+9}{(x^2-2\,x+1)(x^2+2x+5)}$ на простейшие. Так как $\left(x^2 - 2\,x + 1\right)\left(x^2 + 2x + 5\right) = (x-1)^2\left(x^2 + 2x + 5\right)$, то $R(x)$ представляется в виде

$$\frac{5x^3 + 3x^2 + 23x + 9}{(x^2 - 2\,x + 1)(x^2 + 2x + 5)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Mx + N}{x^2 + 2x + 5}, \tag{6.4}$$

где коэффициенты A, B, M, N пока не найдены. Приводя правую часть к общему знаменателю, а затем отбрасывая в обеих частях одинаковые знаменатели, получим тождество

$$5x^3+3x^2+23x+9 \equiv A\left(x^2+2x+5\right)+ \\ +B\,(x-1)\left(x^2+2x+5\right)+(Mx+N)\,(x-1)^2\,. \tag{6.5}$$

Можно было бы приравнять здесь коэффициенты при одинаковых степенях x (начиная с x^3), а затем решить полученную систему уравнений относительно A, B, M, N. Но мы поступим проще. Применим так называемый *метод частных значений.*

Так как (6.5) – тождество, то оно верно при любых значениях x. Удобно выбрать значение $x=1$. При этом из (6.5) получаем равенство $40=8A$, откуда выводим, что $A=5$. Далее подставляем $A=5$ в (6.4) и переносим все первые слагаемые влево; будем иметь

$$5x^3-2x^2+13x-16 \equiv B\,(x-1)\left(x^2+2x+5\right)+(Mx+N)\,(x-1)^2\,.$$

Разделив обе части этого тождества на $x-1$, получим

$$5x^2+3x+16 = B\left(x^2+2x+5\right)+(Mx+N)\,(x-1)\,.$$

Полагая здесь снова $x=1$, будем иметь $24=8B \Leftrightarrow B=3$, и последнее равенство перепишется в виде $2x^2-3x+1=(Mx+N)\,(x-1) \Rightarrow 2x-1=Mx+N$. Отсюда сразу же находим $M=2, N=-1$. Следовательно, все коэффициенты разложения (6.4) найдены и мы получаем ответ: $\frac{5x^3+3x^2+23x+9}{(x^2-2\,x+1)(x^2+2x+5)}=\frac{5}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}+\frac{2x-1}{x^2+2x+5}$.

Из теоремы 6.5 вытекает, что интегрирование правильных алгебраических дробей сводится к их разложению на простейшие дроби и последующему интегрированию последних. Займемся задачей интегрирования простейших дробей.

Дроби типа $I-II$ интегрируются очевидным образом:

$\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A{\cdot}\ln|x-a|+C;\;\; \int\frac{A}{(x-a)^k}dx=A\int(x-a)^{-k}\,d\,(x-a)=\frac{A(x-\ldots}{-k\ldots}$ C.

Дробь типа III интегрируется следующим образом:

$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx =$
$= \left[x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right);\ x+\frac{p}{2}=t, dx=dt,\ q-\frac{p^2}{4}=a^2\right] =$
$= \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}dt = M\int\frac{tdt}{t^2+a^2} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2} =$
$= \frac{M}{2}\int\frac{d\left(t^2+a^2\right)}{t^2+a^2} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{t}{a} = \frac{M}{2}\ln\left(t^2+a^2\right) +$
$+ \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{t}{a} + C = \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{a} + C.$

Дробь типа IV интегрируется сложнее. Сначала производятся все операции, применяемые при интегрировании дроби типа III, а затем используется рекуррентная формула

$$\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{m+1}} = \frac{1}{2ma^2}\left(\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^m} + (2m-1)\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m}\right).$$

Например,

$$\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^2} = \frac{1}{2\cdot1\cdot a^2}\left(\frac{t}{t^2+a^2} + (2-1)\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)}\right) =$$

$$= \frac{t}{2a^2\left(t^2+a^2\right)} + \frac{\mathrm{arctg}\left(\frac{t}{a}\right)}{2a^3} + C.$$

В заключение предлагаем вычислить самостоятельно интеграл

$$\int\frac{2\,x^2+2\,x+13}{(x-2)\cdot\left(x^2+1\right)^2}\,dx = \int\left(\frac{-4-3x}{\left(x^2+1\right)^2} + \frac{-2-x}{x^2+1} + \frac{1}{x-2}\right)dx$$

и получить ответ: $\frac{1}{4}\cdot\frac{-8x+6}{x^2+1} - 4\mathrm{arctg}\,(x) - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + \ln|x-2| + C.$

6.5. Интегрирование тригонометрических выражений

Интегралы типа $I = \int R(\sin x, \cos x)\,dx$, где $R(u,v)$ – дробно-рациональная функция переменных u и v, сводятся к интегрированию рациональной функции одной переменной t с помощью *универсальной подстановки* $t = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$. Действительно, тогда

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

поэтому $I = \int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} \equiv \int R_1(t)\,dt$, где $R_1(t)$ – дробно-рациональная функция одной переменной. К последнему интегралу можно уже применить алгоритм разложения на простейшие дроби и свести вычисления к интегрированию простейших дробей типа $I - IV$. Однако не всегда удобно пользоваться универсальной подстановкой, так как она часто приводит к громоздким выкладкам.

Иногда удобно *пользоваться частными типами подстановок,* которые мы приводим ниже (слева написано свойство подынтегральной функции R, справа – соответствующая замена переменной).

1. $R(-u,v) \equiv -R(u,v) \Rightarrow \boxed{\cos x = t}$.
2. $R(u,-v) \equiv -R(u,v) \Rightarrow \boxed{\sin x = t}$.
3. $R(-u,-v) \equiv R(u,v) \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg} x = t}$.
4. $\int R\left(\sin^2 x\right)dx,\ \int R\left(\cos^2 x\right)dx \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg} x = t}$

(здесь часто бывает удобным воспользоваться формулами $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.)

И, наконец, интегралы типа

$$\int \left[\begin{array}{c} \cos\alpha x \cdot \cos\beta x dx, \\ \sin\alpha x \cdot \cos\beta x dx, \\ \sin\alpha x \cdot \sin\beta x dx \end{array}\right.$$

преобразуются в интегралы от синусов и косинусов с помощью формул тригонометрии:

$$\cos\alpha x\cdot\cos\beta x=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)x+\cos(\alpha+\beta)x\right),$$
$$\sin\alpha x\cdot\sin\beta x=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x\right),$$
$$\sin\alpha x\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)x+\sin(\alpha+\beta)x\right).$$

Приведём примеры.

1. $\int\frac{\sin^2 xdx}{\sin^2 x-\cos^2 x}=\left[\operatorname{tg} x=t,\cos^2 x=\frac{1}{1+t^2},\sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2},\ dx=\frac{dt}{1+t^2}\right]=$
$=\int\frac{\frac{t^2}{1+t^2}\cdot\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2}-\frac{1}{1+t^2}}dt=\int\frac{t^2}{t^4-1}dt=\int\left(-\frac{1}{4(t+1)}+\frac{1}{2(t^2+1)}+\frac{1}{4(t-1)}\right)dt=$
$=\frac{1}{4}\ln\left(\operatorname{tg}x-1\right)-\frac{1}{4}\ln\left(\operatorname{tg}x+1\right)+\frac{1}{2}x+C.$

2. $\int\cos 3x\cdot\sin 5xdx=\frac{1}{2}\int\left(\sin 2x+\sin 8x\right)dx=-\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 8x+C.$

3. $\int\cos^4 xdx=\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2dx=\frac{1}{4}\int\left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx=$
$=\frac{x}{4}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{1}{4}\int\cos^2 2xdx=$
$=\frac{x}{4}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{1}{8}\int\left(1+\cos 4x\right)dx=\frac{x}{4}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{x}{8}+\frac{1}{32}\sin 4x+C=$
$=\frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C.$

Для усвоения изложенного материала предлагаем вычислить интегралы и проверить истинность выписанных ниже равенств.

1. $\int\ln(4x^2+1)dx=x\ln(4x^2+1)+\operatorname{arctg}2x-2x+C.$

2. $\int_{-2}^{0}(x^2-4)\cos 3xdx=\frac{4}{9}\cos 6-\frac{2}{27}\sin 6.$

3. $\int\frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx=-\frac{1}{x-\sin x}+C.$

4. $\int_0^{1/2}\frac{8x-\operatorname{arctg}2x}{1+4x^2}dx=\ln 2-\frac{\pi^2}{32}.$

5. $\int\frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)(x-2)}dx=x+2\ln|x-4|+12\ln|x-3|-8\ln|x-2|+C.$

6. $\int\frac{x^3+6x^2+13x+9}{(x+1)(x+2)^3}dx=\ln|x+1|-\frac{1}{2(x+2)^2}+C.$

7. $\int\frac{x^3+5x^2+12x+4}{(x+2)^2(x^2+4)}dx=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4\right|+\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C..$

8. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x - \sin x}{(1+\sin x)^2} dx = \frac{1}{6}$.

9. $\int_{\pi/4}^{\mathrm{arctg} 3} \frac{dx}{(3\mathrm{tg} x + 5)\sin 2x} = \frac{1}{10}(\ln 3 - \ln 14 + \ln 8)$.

10. $\int_0^{\pi} 2^4 \cos^8 \frac{x}{2} dx = \frac{35}{8}\pi$.

Для усвоения изложенной теории рекомендуем также выполнить задачи из типового расчета “Интегралы,” помещённого в конце пособия.

Лекция 7. Несобственные интегралы. Геометрические приложения интегралов

Ранее рассматривались интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$ с конечными пределами a, b и от ограниченных функций $f(x)$. Если хотя бы одно из этих условий нарушается, то указанный интеграл будет *несобственным.* Такие интегралы часто встречаются в приложениях, поэтому перейдем к их изучению.

7.1. Несобственные интегралы

Сначала рассмотрим интегралы с бесконечными пределами.

Определение 7.1. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a, N] \subset [a, +\infty)$. Тогда если существует конечный предел $\lim\limits_{N\to+\infty} \int_a^N f(x)\,dx = I,$ то говорят, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится.* При этом пишут $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = I.$ Если же указанный предел не существует или равен бесконечности, то говорят, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *расходится* (см. рис. 7.1).

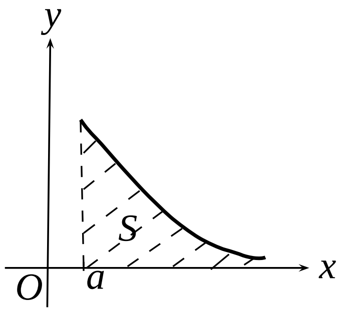


Рис. 7.1

Аналогично определяются интегралы

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{N\to+\infty} \int_{-N}^{b} f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \int_{-N}^{c} f(x)\,dx + \lim_{M\to+\infty} \int_{c}^{M} f(x)\,dx$$

(здесь c – произвольная конечная точка).

Эти интегралы называют *несобственными интегралами первого рода.* Их геометрический смысл ясен из рис. 7.1, где площадь $S = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$ Теперь рассмотрим интегралы от неограниченных функций.

Определение 7.2. Если функция $f(x)$ не ограничена в окрестности точки $x = b$ (ее называют *особой точкой*) и является интегрируемой на любом отрезке $[a, b-\varepsilon] \subset [a, b)$, то по определению полагают $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$ Если этот предел существует и конечен, то говорят, что интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ *второго рода* сходится. В противном случае он называется расходящимся. Аналогичный смысл имеют интегралы (второго рода)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx,\ \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

где в первом случае точка $x = a$ является особой, а во втором случае точка $c \in (a,b)$ является особой. Поскольку заменой переменной $t = \frac{1}{b-x}$ интеграл второго рода $\int_a^b f(x)\,dx$ ($x = b$ – особая точка) сводится к интегралу первого рода, то будем изучать только интегралы с бесконечным верхним пределом. Сначала покажем, что *эталонный интеграл*($a > 0$)

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \left[\begin{array}{l}\text{сходится, если } \alpha > 1,\\ \text{расходится, если } \alpha \le 1.\end{array}\right.$$

Действительно, имеем

$$\int_a^N\frac{dx}{x^\alpha} = \left[\begin{array}{l}\ln x\big|_{x=a}^{x=N} = \ln N - \ln a,\ \alpha = 1,\\ \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\big|_{x=a}^{x=N} = \frac{N^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1},\ \alpha \ne 1.\end{array}\right.$$

Переходя здесь к пределу при $N\to+\infty$, получаем наше утверждение. С помощью эталонного интеграла можно исследовать сходимость других несобственных интегралов.

Теорема сравнения 1. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на произвольном отрезке $[a,N]\subset[a,+\infty)$ и имеют место неравенства $0 \le f(x) \le g(x)$ $(\forall x\in[a,+\infty))$. Тогда если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$, то и сходится интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Если же интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, то и расходится интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.*

Теорема сравнения 2. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$* ***положительны*** *и интегрируемы на произвольном отрезке $[a,N]\subset[a,+\infty)$. Пусть, кроме того, существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = K^{\ne\infty}_{\ne 0}$. Тогда интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.*

Замечание 7.1. При применении этих теорем часто используется эквивалентность бесконечно малых функций.

Таблица 1.1 эквивалентных бесконечно малых
Если $u\,(x) \to 0$ *при* $x \to x_0$, *то при* $x \to x_0$ *верны следующие соотношения:*
1) $\sin u \sim u$,
2) $\mathrm{tg} u \sim u$,
3) $\arcsin u \sim u$,
4) $\mathrm{arctg}\, u \sim u$,
5) $1 - \cos u \sim \dfrac{1}{2}u^2$,
6) $e^u - 1 \sim u$,
7) $a^u - 1 = u \ln a,\ \ a > 0, a \neq 1$,
8) $\ln(1 + u) \sim u$,
9) $(1 + u)^\sigma - 1 \sim \sigma \cdot u$, $\sigma = \mathrm{const}$.

Например, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{3+x\sqrt{x}}dx$ сходится, так как $\frac{\sin\frac{1}{x}}{3+x\sqrt{x}} \sim \frac{\frac{1}{x}}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{5/2}}$ и интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{5/2}}$ сходится ($\alpha = 5/2 > 1$; см. эталонный интеграл и теорему сравнения 2).

Отметим, что теоремы сравнения верны лишь для неотрицательных подынтегральных функций. Если эти функции не являются знакопостоянными, то вводят понятие абсолютной сходимости: говорят, что интеграл $\int_a^{+\infty} f\,(x)\,dx$ *сходится абсолютно*, если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f\,(x)\,|dx$. Если последний интеграл расходится, а сам интеграл $\int_a^{+\infty} f\,(x)\,dx$ сходится, то его называют *условно сходящимся интегралом.*

Нетрудно показать, что *из сходимости интеграла* $\int_a^{+\infty} |f\,(x)\,|dx$ *вытекает обычная сходимость интеграла* $\int_a^{+\infty} f\,(x)\,dx$.

Обратное, вообще говоря, неверно. Можно показать, например, что интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ сходится, а интеграл $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ расходится. Тем не менее, при исследовании сходимости интегралов от знакопеременных функций изучают сначала их абсолютную сходимость (здесь можно применить теоремы сравнения), а затем — условную сходимость.

Например, рассмотрим интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x\ln^2 x} dx$. Здесь подынтегральная функция изменяет знак на полуинтервале $[2, +\infty)$, поэтому применить к нему теоремы сравнения нельзя. Рассмотрим "модульный" интеграл $I = \int_2^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x\ln^2 x} \right| dx$. Здесь подынтегральная функция неотрицательна, и поэтому к этому интегралу можно применить теорему сравнения 1:

$$\left| \frac{\sin x}{x\ln^2 x} \right| \le \frac{1}{x\ln^2 x} \; (\forall x \in [2, +\infty)) \, .$$

Так как интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x}\Big|_{x=2}^{x=+\infty} = \frac{1}{\ln 2} <$ $< \infty$ сходится, то и интеграл I также сходится, а, значит, исходный интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x\ln^2 x} dx$ сходится абсолютно.

7.2. Вычисление площадей плоских фигур

Из геометрического смысла определенного интеграла вытекает следующее утверждение.

Теорема 7.1. *Если фигура D задана неравенствами $a \le x \le$ $\le b$, $f_1(x) \le y \le f_2(x)$, где функции $f_1(x), f_2(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, то площадь этой фигуры вычисляется по формуле* $S_D = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] \, dx$. *Если фигура ограничена линиями $y = f(x)$, $y =$ $= 0$ $(a \le x \le b)$, причем функция $f(x)$ знакопеременна и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то её площадь равна $\int_a^b |f(x)| dx$.*

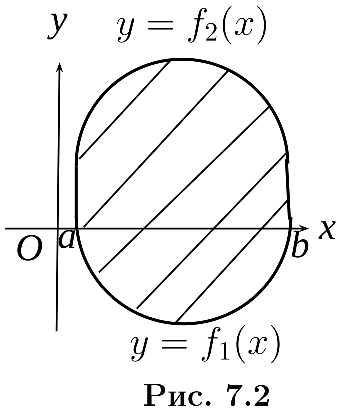


Рис. 7.2

Действительно, фигуру D можно перенести параллельно оси Oy вверх и тогда она будет сверху и снизу ограничена линиями

$$y = f_2(x) + C, \; y = f_1(x) + C \quad \left(C \ge \min_{x \in [a,b]} f_1(x) \right).$$

Поэтому $S_D = \int_a^b (f_2(x) + C) \, dx - \int_a^b (f_1(x) + C) \, dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] \, dx$.

Переходя к вычислению площади в полярных координатах, напомним, что любая точка $M(x,y)$ на плоскости вполне однозначно определяется своим полярным радиусом $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \rho$ и полярным углом $\theta = \left(\overrightarrow{OM},\,^\wedge\,\overrightarrow{Ox}\right)$, $0 \le \theta < 2\pi$ (считаем, что началу координат O соответствует радиус $\rho = 0$ и любой фиксированный полярный угол $\theta \in [0, 2\pi)$). Поэтому любую кривую на плоскости можно задать уравнением $\rho = \rho(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$. Переход от декартовых координат точки $M(x,y)$ к полярным осуществляется формулами

$$x = \rho\cos\theta,\; y = \rho\sin\theta.$$

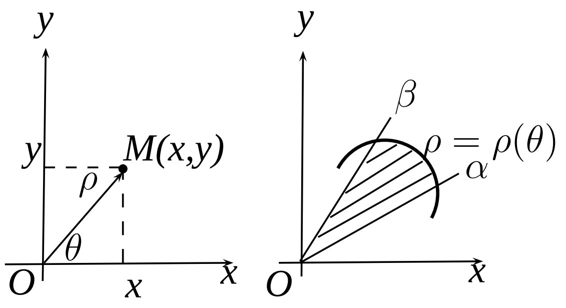


Рис. 7.3

Теорема 7.2. *Пусть фигура D задана в полярных координатах неравенствами $0 \le \rho \le \rho(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$ (рис. 7.3), причем фун- кция $\rho = \rho(\theta)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$. Тогда площадь этой фигуры вычисляется по формуле $S_D = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)\,d\theta$. Если фигура описывается неравенствами*

$$\rho_1(\theta) \le \rho \le \rho_2(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta,$$

причем функции $\rho_1(\theta)$, $\rho_2(\theta)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$, то её площадь вычисляется по формуле $S_D = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left[\rho_1^2(\theta) - \rho_2^2(\theta)\right] d\theta$.

Площади фигур с замкнутой границей удобно вычислять, если граница задана в параметрической форме.

Теорема 7.3. *Пусть фигура D имеет границу Γ, заданную параметрически уравнениями*

$$x = x(t),\ y = y(t),\ \alpha \le t \le \beta,$$

причем при возрастании параметра t от α к β обход границы Γ совершается так, что сама область D остается слева от наблюдателя. Если при этом функции $x'(t)$, $y(t)$ непрерывны на отрезке, то *площадь этой фигуры вычисляется по формуле* $S_D = -\int_\alpha^\beta y(t)\,x'(t)\,dt \equiv -\int_\alpha^\beta ydx|_{x=x(t),y=y(t)}$ *(здесь* $t=\alpha$ *— начало обхода,* $t=\beta$ *— конец обхода границы* Γ *).*

7.3. Вычисление длины дуги

Пусть на плоскости Oxy задана некоторая незамкнутая кривая Γ (см. рис.7.4). Произведем разбиение

$$\overset{\frown}{M_0M_n} = \bigcup_{i=1}^{n-1} \overset{\frown}{M_iM_{i+1}} \qquad (\Delta)$$

этой дуги на частичные дуги $\overset{\frown}{M_iM_{i+1}}$, в каждую из которых впишем хорду M_iM_{i+1}. Тогда получим ломанную $M_0M_1...M_n$, вписанную в дугу Γ. Пусть $\Delta s_i = |M_iM_{i+1}|-$ длина хорды M_iM_{i+1}.

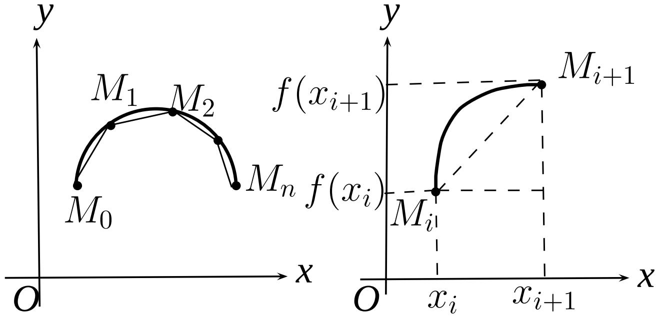


Рис. 7.4

Определение 7.3. За длину дуги l кривой Γ принимают предел, к которому стремится периметр ломанной, вписанной в эту дугу, при стремлении длины максимального звена этой ломанной к нулю, т. е. $l = \lim\limits_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta s_i$.[5] Если кривая Γ замкнутая, то разбивают ее двумя несовпадающими точками на две незамкнутые кривые Γ_1 и Γ_2 $(\Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2)$ и тогда дл. $\Gamma =$ дл. $\Gamma_1 +$ дл. Γ_2.

Теорема 7.4. *Если дуга* Γ *задана уравнением* $y = f(x)$, $a \le \le x \le b$, *где функция* $f(x)$ *непрерывно дифференцируема на отрезке* $[a,b]$, *то ее длина вычисляется по формуле*

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx. \qquad (7.1)$$

[5]Если этот предел существует и конечен, то дуга l называется *спрямляемой.*

Доказательство. Произведем разбиение $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ отрезка $[a, b]$ на частичные отрезки $[x_i, x_{i+1}]$. Это разбиение порождает разбиение (Δ) дуги Γ на частичные дуги $\overset{\frown}{M_iM_{i+1}}$. По определению 7.3 имеем $l = \lim\limits_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta s_i$. Длина хорды M_iM_{i+1} равна (см. рис.7.4) величине

$$\Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{\Delta x_i^2 + \left(f\left(x_{i+1}\right) - f\left(x_i\right)\right)^2} =$$
$$= \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i = \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}\right)^2} \Delta x_i.$$

По теореме Лагранжа существует точка $c_i \in (x_i, x_{i+1})$ такая, что

$$f\left(x_{i+1}\right) - f\left(x_i\right) = f'\left(c_i\right)\left(x_{i+1} - x_i\right)$$

поэтому $\Delta s_i = \sqrt{1 + \left(f'\left(c_i\right)\right)^2}\, \Delta x_i$. Учитывая это, получаем, что

$$l = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta s_i = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + \left(f'\left(c_i\right)\right)^2} \Delta x_i =$$
$$= \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'\left(x\right)\right)^2} dx.$$

Теорема доказана.

Замечание 7.2. Величина $dl = \sqrt{1 + \left(f'\left(x\right)\right)^2} dx$ называется *дифференциалом дуги* $y = f\left(x\right)$, $a \le x \le b$. Учитывая, что $f'\left(x\right) dx = dy$, её можно записать в виде $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Мы получили теорему Пифагора для криволинейного треугольника с катетами dx, dy и "гипотенузой" dl. Теперь формулу (7.1) для вычисления длины дуги можно записать кратко так: $l = \int_a^b dl$. Эта форма записи длины дуги особенно удобна, если дуга Γ задана параметрически или в полярной форме. Из нее можно получить следующие утверждения.

Теорема 7.5. *Если дуга* Γ *задана параметрически уравнениями* $x = x\left(t\right)$, $y = y\left(t\right)$, $t \in [\alpha, \beta]$, *где функции* $x\left(t\right)$, $y\left(t\right)$ *непрерывно дифференцируемы на отрезке* $[\alpha, \beta]$, *то ее длина вычисляется по формуле*

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2\left(t\right) + \dot{y}^2\left(t\right)}\, dt.$$

Если дуга Γ *задана в полярных координатах уравнением* $\rho = \rho(\theta)$, $\varphi_1 \leq \theta \leq \varphi_2$, *где функция* $\rho(\theta)$ *непрерывно дифференцируема на отрезке* $[\varphi_1, \varphi_2]$, *то её длина вычисляется по формуле*

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\, d\theta.$$

Действительно, если Γ задана в параметрической форме, то

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\dot{x}^2(t)\, dt^2 + \dot{y}^2(t)\, dt^2} = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt.$$

Рекомендуем получить формулу длины дуги в полярных координатах самостоятельно.

Например, если дуга Γ задана уравнением $\rho = 2\cos\theta$, $0 \leq \theta \leq$ $\leq \pi/6$, то её длина равна

$$l = \int_0^{\pi/6} \sqrt{4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta} d\theta = 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

7.4. Вычисление объёмов тел

С помощью определенного интеграла можно вычислять объемы тел. Дадим соответствующие формулы.

Теорема 7.6. *Пусть тело* W *заключено между плоскостями* $x = a$ *и* $x = b$, *а* $S = S(x)$ – *площадь его поперечного сечения плоскостью* $x = \text{const}$. *Если функция* $S(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *то объём тела* W *вычисляется по формуле*

$$V = \int_a^b S(x)\, dx.$$

Доказательство. Произведем разбиение отрезка $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \qquad (\Delta)$$

на частичные отрезки $[x_i, x_{i+1}]$ и обозначим $\lambda = \max\limits_{i=\overline{0,n-1}} \Delta x_i = \max\limits_{i=\overline{0,n-1}} (x_{i+1} - x_i)$ – ди разбиения (Δ). Плоскости $x = x_i$ разобьют тело W на тела W_i, которые можно приближенно считать прямыми круговыми цилиндрами высотой $h = \Delta x_i$ и основаниями – кругами площади $S = S(\bar{x}_i)$, где $\bar{x}_i$ – произвольная фиксированная точка отрезка $[x_i, x_{i+1}]$, $S(\bar{x}_i)$ – площадь поперечного сечения плоскостью $x = \bar{x}_i$. Объём тела W приближенно равен сумме объёмов тел W_i, т.е. $V \simeq \sum_{i=0}^{n-1} V_i = \sum_{i=0}^{n-1} S(\bar{x}_i)\,\Delta x_i$. Это равенство будет тем точнее, чем мельче разбиение (Δ), и при $\lambda \to 0$ оно становится точным, т.е.

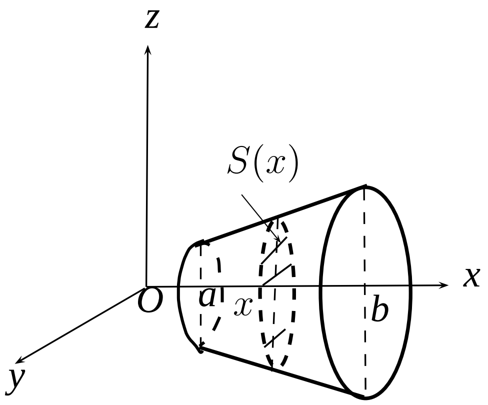


Рис. 7.5

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} S(\bar{x}_i)\,\Delta x_i = \int_a^b S(x)\,\Delta x.$$

Теорема доказана.

Замечание 7.3. Если тело W получено вращением криволинейной трапеции

$$D = \{0 \le y \le f(x),\, a \le x \le b\}$$

вокруг оси Ox, то объём этого тела вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Действительно, в этом случае поперечное сечение является кругом радиуса $R = f(x)$, поэтому $S(x) = \pi \cdot f^2(x)$. Аналогично вычисляется объём тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции $D = \{0 \le x \le g(y),\, c \le y \le d\}$: $V = \pi \int_c^d g^2(y)\,dy$ (конечно, в выписанных формулах для V предполагается, что функции $f(x)$ и $g(y)$ непрерывны на соответствующих отрезках).

Рекомендуем выполнить задачи на приложения определённого интеграла в типовом расчете “Интегралы,” помещённом в конце пособия.

§1. Теория пределов. Задачи

Задача 1. Найти пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ последовательностей $\{a_n\}$, заданных своими общими членами, выписанными ниже.

1.1. $\frac{(2-n)^4-(1-n)^4}{-n^3-(n+2)^3}$.

1.2. $\frac{(4-n)^4-(3-n)^4}{2(2-n)^3-n^3}$.

1.3. $\frac{(2-2n)^4-(1-2n)^4}{-8n^3-(2+2n)^3}$.

1.4. $\frac{(4-2n)^4-(3-2n)^4}{(2-2n)^3-9n^3}$.

1.5. $\frac{(n+2)^3-(n+2)^2}{n^3-(n+2)^3}$.

1.6. $\frac{n^3-n^2}{(-2+n)^3-n^3}$.

1.7. $\frac{(2+3n)^3-(2-3n)^3}{27n^3-(2+3n)^3}$.

1.8. $\frac{(3n-1)^3-(3n-1)^2}{(3n-3)^2-(3n-1)^3}$.

1.9. $\frac{(3+2n)^3-(3+2n)^2}{(2n+1)^2-2(3+2n)^3}$.

1.10. $\frac{(1+5n)^3-(1+5n)^2}{(5n-1)^2-3(1+5n)^3}$.

1.11. $\frac{2(3n+1)^3-(3n-2)^3}{9n^2+6n-3}$.

1.12. $\frac{2(2+5n)^3-(5n-1)^3}{(1+5n)^3-1+10n}$.

1.13. $\frac{54n^3-(3n-3)^3}{(3n-1)^2+6n^3-5}$.

1.14. $\frac{2n^3-(-3+n)^3}{(-1+n)^2-5+2n^3}$.

1.15. $\frac{16n^3-(2n-3)^3}{(2n-1)^2+4n^3-5}$.

1.16. $\frac{(2n+7)^3-(2+2n)^3}{(6n+2)^2+(8n+1)^2}$.

1.17. $\frac{(2n+6)^3-(2n+1)^3}{(6n-1)^2+2(8n-3)^2}$.

1.18. $\frac{(3n+7)^3-(2+3n)^3}{2(9n+2)^2+(12n+1)^2}$.

1.19. $\frac{(2+3n)^4-(3n-2)^4}{(3n+5)^2+(3n-5)^2}$.

1.20. $\frac{(7n+2)^4-(7n-2)^4}{(7n+5)^2+(2n-5)^4}$.

1.21. $\frac{(6n-10)!+(6n-8)!}{(6n-9)!(2n-4)}$.

1.22. $\frac{(9n-4)!+(9n-2)!}{(9n-3)!(3n-2)}$.

1.23. $\frac{2^{3n-1}-5^{3n}}{2^{3n}+5^{3n+1}}$.

1.24. $\frac{(3n+2)!+(3n+4)!}{(3n+1)!+(3n+4)!}$.

1.25. $\frac{2^{5n+2}-5^{5n+3}}{2^{5n+3}+5^{5n+4}}$.

1.26. $\frac{(-3+2\,n)^3-8\,(n-2)^3}{(-3+2\,n)^2+4\,(n-2)^2}$.

1.27. $\frac{(-1+2\,n)^3-8\,(n-1)^3}{(-1+2\,n)^2+4\,(n-1)^2}$.

1.28. $\frac{(5+2\,n)^3-8\,(n+2)^3}{(5+2\,n)^2+4\,(n+2)^2}$.

1.29. $\frac{(1+4\,n)^3-64\,n^3}{(1+4\,n)^2+16\,n^2}$.

1.30. $\frac{(3+2\,n)^3-8\,(n+1)^3}{(3+2\,n)^2+4\,(n+1)^2}$.

Ответы. **1.16.** $3/5$. **1.17.** $15/41$. **1.18.** $15/34$. **1.19.** ∞. **1.20.** 150.

Задача 2. Найти пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ последовательностей $\{a_n\}$, заданных своими общими членами, выписанными ниже.

2.1. $(2n+1)\left(\sqrt{(2n+1)^2+1}-2\sqrt{n^2+n}\right)$.

2.2. $\sqrt{(n+5)\,(4+n)}-\sqrt{(n+2)\,(6+n)}$.

2.3. $(-3+n)\left(\sqrt{n^2-6n+10}-\sqrt{n^2-6n+8}\right)$.

2.4. $(-3n+1)\left(\sqrt{3}\sqrt{n\,(3n-2)}-\sqrt{9n^2-6n+2}\right)$.

2.5. $\sqrt{5}\sqrt{(1+5n)\,n}-\sqrt{(5n-2)\,(2+5n)}.$

2.6. $\frac{\sqrt{(n+2)^3}-\sqrt{(1+n)n(-2+n)}}{\sqrt{1+n}}.$

2.7. $\frac{2\left(\sqrt{n^3}-\sqrt{(-1+n)(-2+n)(-4+n)}\right)}{\sqrt{-1+n}}.$

2.8. $\sqrt{3}\sqrt{(3n+1)\,n}-\sqrt{(3n-2)\,(2+3n)}.$

2.9. $\frac{4\left(\sqrt{(4+2n)^3}-\sqrt{2}\sqrt{(3+2n)(2+2n)n}\right)}{\sqrt{3+2n}}.$

2.10. $\frac{6\left(\sqrt{(2n+6)^3}-\sqrt{(2n+5)(4+2n)(2+2n)}\right)}{\sqrt{2n+5}}.$

2.11. $\frac{8\left(\sqrt{(8+2n)^3}-\sqrt{(2n+7)(2n+6)(4+2n)}\right)}{\sqrt{2n+7}}.$

2.12. $8\sqrt{(2n+9)\,(8+2n)}-8\sqrt{(2n+6)\,(2n+10)}$

2.13. $\frac{7\left(\sqrt{(8+2n)^3}-\sqrt{(2n+7)(2n+6)(4+2n)}\right)}{\sqrt{2n+7}}.$

2.14. $7\ (2n+7)\left(\sqrt{(2n+7)^2+1}-2\sqrt{n^2+7n+12}\right).$

2.15. $5\,(2n-3)\left(\sqrt{(2n-3)^2+1}-2\sqrt{n^2-3n+2}\right).$

2.16. $\frac{59\left(\sqrt{(2n-2)^3}-\sqrt{(2n-3)(2n-4)(2n-6)}\right)}{\sqrt{2n-3}}.$

2.17. $2\sqrt{2n^3+2}\left(\sqrt{8n^3+2}-\sqrt{8n^3-1}\right).$

2.18. $2\sqrt{125n^3+8}\left(\sqrt{125n^3+2}-\sqrt{125n^3-1}\right).$

2.19. $3\sqrt{27n^3+8}\left(\sqrt{27n^3+2}-\sqrt{27n^3-1}\right).$

2.20. $5\sqrt{343n^3+8}\left(\sqrt{343n^3+2}-\sqrt{343n^3-1}\right).$

2.21. $8n\left(\sqrt{64n^2+1}-\sqrt{64n^2-1}\right).$

2.22. $\sqrt{(5n+5)\,(5n+4)}-\sqrt{(5n+2)\,(5n+6)}.$

2.23. $\frac{\sqrt{(n-8)^3}-\sqrt{(n-9)(n-10)(n-12)}}{\sqrt{n-9}}.$

2.24. $\frac{\sqrt{(2n-8)^3}-\sqrt{(2n-9)(2n-10)(2n-12)}}{\sqrt{2n-9}}$

2.25. $\sqrt{(5n-7)\,(5n-8)}-\sqrt{(5n-10)\,(5n-6)}.$

2.26. $\frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{(n+1)^2+2}}{\sqrt[4]{4\,(n+1)^4+1}-\sqrt[3]{(n+1)^4-1}}.$

2.27. $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{(n-1)^2+2}}{\sqrt[4]{4\,(n-1)^4+1}-\sqrt[3]{(n-1)^4-1}}.$

2.28. $\frac{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^4+2}}{\sqrt[4]{4\,n^8+1}-\sqrt[3]{n^8-1}}.$

2.29. $\frac{\sqrt{n+4}-\sqrt{(n+2)^2+2}}{\sqrt[4]{4\,(n+2)^4+1}-\sqrt[3]{(n+2)^4-1}}.$

2.30. $\frac{\sqrt{5\,n+2}-\sqrt{25\,n^2+2}}{\sqrt[4]{2500\,n^4+1}-\sqrt[3]{625\,n^4-1}}.$

Ответы. **2.16.** 62/3. **2.17.** 3/2 **2.18.** 3. **2.19.** 9/2 **2.20.** 15/2.

Задача 3. Вычислить пределы функций.

3.1. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2}-2-x}{1+x}$.

3.2. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{\sqrt{(2+x)^2}-4-x}{x+3}$.

3.3. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{(-3+x)^2}+1-x}{x-2}$.

3.4. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{(-3+x)^2}-5+x}{-x+4}$.

3.5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(27+8x)^{1/3}-(27-8x)^{1/3}}{4(x^2)^{1/3}+2^{3/5}x^{1/5}}$.

3.6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(27+4x)^{1/3}-(27-4x)^{1/3}}{16^{1/3}(x^2)^{1/3}+4^{1/5}x^{1/5}}$.

3.7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\left((1+x)^{1/3}-(1-x)^{1/3}\right)}{9(x^2)^{1/3}+3^{3/5}x^{1/5}}$.

3.8. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2\left(x^{1/3}-1\right)}{-\sqrt{2x+2}+2\sqrt{x}}$.

3.9. $\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}}\frac{3\left(4^{1/3}3^{1/3}x^{1/3}-2\right)}{\sqrt{3x+2}-\sqrt{6}\sqrt{x}}$.

3.10. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\frac{3\left(4^{2/3}x^{1/3}-2\right)}{\sqrt{4x+2}-2\sqrt{2}\sqrt{x}}$.

3.11. $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}}\frac{\sqrt{2x+13}-2\sqrt{2x+1}}{4x^2-9}$.

3.12. $\lim\limits_{x\to \frac{3}{4}}\frac{32\left(\sqrt{4x+13}-2\sqrt{1+4x}\right)}{16x^2-9}$.

3.13. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{8\left(\sqrt{3x+13}-2\sqrt{1+3x}\right)}{9x^2-9}$.

3.14. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\frac{8\left(\sqrt{(-1+3x)^2}-1-3x\right)}{x}$.

3.15. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}+\frac{\sqrt{2x+13}-2\sqrt{2x+1}}{4x^2-9}\right)$.

3.16. $\lim\limits_{x\to -5}\frac{(32+x)^{1/3}-(22-x)^{1/3}}{\left((5+x)^2\right)^{1/3}+(5+x)^{1/5}}$.

3.17. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{(28+x)^{1/3}-(26-x)^{1/3}}{\left((x+1)^2\right)^{1/3}+(x+1)^{1/5}}$.

3.18. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+12}-2\sqrt{x}}{(x-1)^2-9}$.

3.19. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(27+6x)^{1/3}-(27-6x)^{1/3}}{36^{1/3}(x^2)^{1/3}+6^{1/5}x^{1/5}}$.

3.20. $\lim\limits_{x\to 2/7}\frac{4^{1/3}7^{1/3}x^{1/3}-2}{\sqrt{7x+2}-\sqrt{14}\sqrt{x}}$.

3.21. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{(x+1)^3-3x-5}{(x+1)^2-x-3}$.

3.22. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{(2+3x)^3-8-9x}{(2+3x)^2-4-3\,x}$.

3.23. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{(5-2x)^3-17+6x}{(5-2x)^2-7+2\,x}$.

3.24. $\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}}\frac{(3x-1)^3+(3x-1)^2-15x+8}{(3x-1)^3-(3x-1)^2-3\,x+2}$.

3.25. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(5x+1)^3+(5x+1)^2-25x-2}{(5x+1)^3-(5x+1)^2-5\,x}$.

3.26. $\lim\limits_{x\to -3/2}\frac{2\sqrt{(1+x)^2}-4-2x}{2x+3}$.

3.27. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{(-4+x)^2}+2-x}{x-3}$.

3.28. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{(1+x)^2}-3-x}{x+2}$.

3.29. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{(x-3)^2}+1-x}{x-2}$.

3.30. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{(x-2)^2}-2-x\right)}{x}$.

Ответы. **3.16.** 0. **3.17.** 0. **3.18.** -1/16. **3.19.** 0. **3.20.** -4/3

Задача 4. Вычислить пределы функций.

4.1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(6x-5)}{\sin(6x)}$.

4.2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(9x-5)}{\sin(9x)}$.

4.3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2-11x+8}{\sin(3x-3)}$.

4.4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4(1-\cos(3x))}{\cos(21x)-\cos(9x)}$.

4.5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5(1-\cos(2x))}{\cos(14x)-\cos(6x)}$.

4.6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{8(1-\cos(5x))}{\cos(35x)-\cos(15x)}$.

4.7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{8\left(2^{2x}-1\right)}{\ln(1+4x)}$.

4.8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\left(2^{\frac{1}{2}x}-1\right)}{\ln(1+x)}$.

4.9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\left(2^{\frac{1}{3}x}-1\right)}{\ln\left(1+\frac{2}{3}x\right)}$.

4.10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\ln\left(1-\frac{7}{3}x\right)}{\sin\left(\pi\left(\frac{1}{3}x+7\right)\right)}$.

4.11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\ln\left(1-\frac{7}{4}x\right)}{\sin\left(\pi\left(\frac{1}{4}x+7\right)\right)}$.

4.12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-21x)}{\sin(\pi(3x+7))}$.

4.13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{9\ln(1-6x)}{\operatorname{arctg}(9x)}$.

4.14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4\left(e^{12x}-1\right)}{\sin\left(\pi\left(\frac{3}{2}x+1\right)\right)}$.

4.15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{4x^2}-1}{\sin\left(\pi\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)\right)}$.

4.16. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{192x^2-40x}{\sin(24x)}$.

4.17. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(5x)}{\cos(35x)-\cos(15x)}$.

4.18. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{8x}-1}{\ln(1+16x)}$.

4.19. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{9}{4}\frac{\ln(1-24x)}{\operatorname{arctg}(36x)}$.

4.20. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-36x}-1}{\sin\left(\pi\left(-\frac{9}{2}x+1\right)\right)}$.

4.21. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(\frac{10}{3}x\right)}{e^{\frac{1}{9}x^2}-1}$.

4.22. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin(x)}{\frac{1}{3}\sqrt{18+3x}-\sqrt{2}}$.

4.23. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin\left(\pi\left(\frac{1}{3}x+1\right)\right)}{\ln\left(1+\frac{2}{3}x\right)}$.

4.24. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{1}{3}x\right)^2-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2x}{\sin^2\left(\frac{1}{3}x-\pi\right)}$.

4.25. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin\left(\frac{3}{5}x\right)}{\frac{1}{5}\sqrt{50+5x}-\sqrt{2}}$.

4.26 $\lim\limits_{x\to 2/3}\frac{\ln\left(-18x^2+9\right)}{\sin(6\pi x)}$.

4.27. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\ln\left(-8x^2+9\right)}{\sin(2\pi x)}$.

4.28. $\lim\limits_{x\to 2/5}\frac{\ln\left(-50x^2+9\right)}{\sin(10\pi x)}$.

4.29. $\lim\limits_{x\to 2/7}\frac{\ln\left(-98x^2+9\right)}{\sin(14\pi x)}$.

4.30. $\lim\limits_{x\to -1/2}\frac{\ln\left(-32x^2+9\right)}{\sin(8\pi x)}$.

Ответы. **4.16.** -5/3 **4.17.** -1/40 **4.18.** $0,5\cdot\ln 2$. **4.19.** -3/2 **4.20.** $-8/\pi$.

Задача 5. Вычислить пределы функций.

5.1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\ \frac{7^{4x}-5^{6x}}{4x-\operatorname{arctg}(6x)}$.

5.2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{5}\ \frac{7^{x}-5^{\frac{3}{2}x}}{x-\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}x\right)}$.

5.3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{3}\ \frac{7^{2x^2}-5^{3x^2}}{2x^2-\operatorname{arctg}(3x^2)}$.

5.4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{3}\ \frac{3^{10x}-2^{2x}}{2x-\sin(18x)}$.

5.5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{15x}-2^{3x}}{3x-\sin(27x)}$.

5.6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4\left(3^{\frac{5}{2}x}-2^{\frac{1}{2}x}\right)}{\frac{1}{2}x-\sin\left(\frac{9}{2}x\right)}$.

5.7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\ \frac{4^{\frac{5}{2}x}-9^{-x}}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{1}{8}x^3\right)}$.

5.8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\left(4^{10\sqrt{x}}-9^{-4\sqrt{x}}\right)}{\sin(2\sqrt{x})-\operatorname{tg}\left(8x^{3/2}\right)}$.

5.9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4^{5x^{1/3}}-9^{-2x^{1/3}}}{\sin\left(x^{1/3}\right)-tg(x)}$.

5.10. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{3}\ \frac{4^{5\ln(x+1)}-9^{-2\ln(x+1)}}{\sin(\ln(x+1))-\mathrm{tg}\left(\ln(x+1)^3\right)}$.

5.11. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{6}\ \frac{4^{10x}-9^{-4x}}{\sin(2x)-\mathrm{tg}(8x^3)}$.

5.12. $\frac{2\left(4^{10\sqrt{x}}-9^{-4\sqrt{x}}\right)}{\sin(2\sqrt{x})-\mathrm{tg}\left(4x^{3/2}\right)}$.

5.13. $\frac{1}{5}\ \frac{4^{5x^2}-9^{-2x^2}}{\sin(x^2)-\mathrm{tg}(x^6)}$.

5.14. $\lim\limits_{x\to0}\ \frac{1}{5}\ \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}-\mathrm{e}^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+\sin(x)}$.

5.15. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}-\mathrm{e}^{-x}}{x+2\sin\left(\frac{1}{4}x^2\right)}$.

5.16. $\lim\limits_{x\to0}\frac{7^{16x}-5^{24x}}{16x-\mathrm{arctg}(24x)}$.

5.17. $\lim\limits_{x\to0}\frac{3^{-30x}-2^{-6x}}{-6x+\sin(54x)}$.

5.18. $\lim\limits_{x\to0}\frac{4^{-45x}-9^{18x}}{-\sin(9x)+\tan(729x^3)}$.

5.19. $\lim\limits_{x\to0}\ \frac{4^{-30x}-9^{12x}}{-\sin(6x)+\tan(216x^3)}$.

5.20. $\lim\limits_{x\to0}\ \frac{\mathrm{e}^{-10x}-\mathrm{e}^{20x}}{-10x+\sin(100x^2)}$.

5.21. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2(3x)-3\mathrm{tg}^2x}{(3x-\pi)^4}$.

5.22. $\lim\limits_{x\to2\pi}\ \frac{\sin^2(x)-\mathrm{tg}^2(x-\pi)}{(x-2\pi)^4}$.

5.23. $\lim\limits_{x\to20}\ \frac{2^{\frac{1}{5}x}-16}{\sin\left(\frac{1}{5}\pi x\right)}$.

5.24. $\lim\limits_{x\to3}\ \frac{3-\frac{1}{3}\sqrt{90-3x}}{\sin(\pi x)}$.

5.25. $\lim\limits_{x\to0}\frac{3-\sqrt{9-2x}}{\sin(3\pi(2x+1))}$.

5.26. $\lim\limits_{x\to0}\frac{3^{6x}-7^{3x}}{\arcsin(9x)-15x}$.

5.27. $\lim\limits_{x\to1}\frac{3^{2x-2}-7^{x-1}}{\arcsin(3x-3)-5x+5}$.

5.28. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{3^{2+2x}-7^{1+x}}{\arcsin(3+3x)-5-5x}$.

5.29. $\lim\limits_{x\to-1/2}\frac{3^{4x+2}-7^{2x+1}}{\arcsin(6x+3)-10x-5}$.

5.30. $\lim\limits_{x\to1/4}\frac{3^{8x-2}-7^{4x-1}}{\arcsin(12x-3)-20x+5}$.

Ответы. **5.16.** $-2\ln(7)+3\ln(5)$. **5.17.** $-\frac{5}{8}\ln(3)+\frac{1}{8}\ln(2)$. **5.18.** $10\ln(2)+4\ln(3)$. **5.19.** $10\ln(2)+4\ln(3)$. **5.20.** 3.

Задача 6. Вычислить пределы функций.

6.1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2}\left(\frac{2+\frac{1}{2}x}{3-\frac{1}{2}x}\right)^{\frac{1}{2}x}$.

6.2. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2+\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}$.

6.3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x+3}\cdot\left(\frac{2+3x}{3-3x}\right)^{3x}$.

6.4. $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{3}\left(\frac{1}{5}\frac{\mathrm{e}^{15x}-1}{x}\right)^{\cos^2\left(\frac{1}{4}\pi+5x\right)}$.

6.5. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\mathrm{e}^{3\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}\right)^{\cos^2\left(\frac{1}{4}\pi+\sqrt{x}\right)}$.

6.6. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{(x+1)^3-1}{\ln(x+1)}\right)^{\cos^2\left(\frac{1}{4}\pi+\ln(x+1)\right)}$.

6.7. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{9x+4}{2+3\sqrt{x}}\right)^{9x+3}$.

6.8. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\frac{1}{4}x^6+4}{2+\frac{1}{2}x^3}\right)^{\frac{1}{4}x^6+3}$.

6.9. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{4}\left(\frac{\frac{1}{4}x^4+4}{\frac{1}{2}x^2+2}\right)^{\frac{1}{4}x^4+3}$.

6.10. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{1}{4}x^{2/3}+4}{\frac{1}{2}x^{1/3}+2}\right)^{\frac{1}{4}x^{2/3}+3}$.

6.11. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\arcsin\left(\left(x^2\right)^{1/3}\right)}{\left(x^2\right)^{1/3}}\right)^{\frac{2}{\left(x^2\right)^{1/3}+5}}$.

6.12. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2}\left(\frac{\arcsin(\ln(x+1))}{\ln(x+1)}\right)^{\frac{2}{\ln(x+1)+5}}$

6.13. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{4}\left(6-\frac{5}{\cos(3x)}\right)^{\mathrm{tg}^2(3x)}$.

6.14. $\lim\limits_{x\to0}\left(6-\frac{5}{\cos\left(3x^{1/3}\right)}\right)^{\mathrm{tg}^2\left(3x^{1/3}\right)}$.

6.15. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x^{3/5}+4}{x^{3/5}+9}\right)^{\frac{1}{x^{1/5}+2}}$.

6.16. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{-5x+2}{3+5x}\right)^{-5\ x}$.

6.17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1}{9}\frac{\mathrm{e}^{-27x}-1}{x}\right)^{\cos\left(-\frac{1}{4}\pi+9x\right)^2}$.

6.18. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{25x^2+4}{-5x+2}\right)^{25x^2+3}$.

6.19. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{121x^2+4}{-11x+2}\right)^{121x^2+3}$.

6.20. $\lim\limits_{x\to 0}\left(6-\frac{5}{\cos(7x)}\right)^{\mathrm{tg}\,(7x)^2}$.

6.21. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-3^{\frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{6x}}\right)^{\frac{2}{\sin\left(\frac{2}{3}x\right)}}$.

6.22. $\lim\limits_{x\to 0}\cos\left(\frac{2}{3}\pi x\right)^{\frac{3}{2x\sin\left(\frac{2}{3}\pi x\right)}}$.

6.23. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{4}{3}x\right)-2\sin\left(\frac{2}{3}x\right)}{x\ln\left(\cos\left(\frac{10}{3}x\right)\right)}$.

6.24. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{10}{3}x\right)-2\sin\left(\frac{5}{3}x\right)}{x\ln\left(\cos\left(\frac{25}{3}x\right)\right)}$.

6.25. $\lim\limits_{x\to +0}\left(\frac{1+\sqrt{x}\cdot 2^{\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}\cdot 3^{\sqrt{x}}}\right)^{\frac{1}{x}}$.

6.26. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\frac{x}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}x}}{1+\frac{x}{2}\cdot 3^{\frac{1}{2}x}}\right)^{\frac{4}{x^2}}$.

6.27. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1+(x-1)2^{x-1}}{1+(x-1)3^{x-1}}\right)^{\frac{1}{(x-1)^2}}$.

6.28. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+5x\cdot 2^{5x}}{1+5x\cdot 3^{5x}}\right)^{\frac{1}{25x^2}}$.

6.29. $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{1+(1+x)2^{1+x}}{1+(1+x)3^{1+x}}\right)^{\frac{1}{(1+x)^2}}$.

6.30. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\frac{x}{3}\cdot 2^{\frac{1}{3}x}}{1+\frac{x}{3}\cdot 3^{\frac{1}{3}x}}\right)^{\frac{9}{x^2}}$.

Ответы. **6.16.** 1. **6.17.** $\sqrt{3}$. **6.18.** 8 **6.19.** 8 **6.20.** 1.

Задача 7. Вычислить пределы функций.

7.1. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{\cos(2x)}{\cos(2)}\right)^{\frac{1}{2x-2}}$.

7.2. $\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}}\left(\frac{\cos(3x)}{\cos(2)}\right)^{\frac{1}{3x-2}}$.

7.3. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{\cos(x-1)}{\cos(2)}\right)^{\frac{1}{x-3}}$.

7.4. $\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{\cos(x-2)}{\cos(2)}\right)^{\frac{1}{x-4}}$.

7.5. $\lim\limits_{x\to 4\ \pi}\cos\left(\frac{1}{2}x\right)^{\frac{\mathrm{ctg}(x)}{\sin\left(\frac{3}{2}x\right)}}$.

7.6. $\lim\limits_{x\to \frac{2\ \pi}{3}}3\cos\left(3x\right)^{\frac{\mathrm{ctg}(6x)}{\sin(9x)}}$.

7.7. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\left(2\mathrm{e}^{3x-1}-1\right)^{\frac{3x}{3x-1}}$.

7.8. $\lim\limits_{x\to 2}\left(2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x-1}-1\right)^{\frac{x}{x-2}}$.

7.9. $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}}3\left(2\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x\sqrt{3}-1}-1\right)^{\frac{x\sqrt{3}}{x\sqrt{3}-3}}$.

7.10. $\lim\limits_{x\to \frac{2}{5}}2\left(2\mathrm{e}^{\frac{5}{2}x-1}-1\right)^{\frac{x}{5x-2}}$.

7.11. $\lim\limits_{x\to 6}3\left(2\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x-2}-1\right)^{\frac{x+2}{\frac{1}{3}x-2}}$.

7.12. $\lim\limits_{x\to \frac{2}{5}+0}\mathrm{e}^{-2}\left(2\mathrm{e}^{5x-2}-1\right)^{\frac{15x+2}{5x-2}}$.

7.13. $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{2}\left(2\mathrm{e}^{2x-2}-1\right)^{\frac{3x+1}{x-1}}$.

7.14. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}+0}\mathrm{e}^{-8}\left(2\mathrm{e}^{4x-2}-1\right)^{\frac{6x+1}{2x-1}}$.

7.15. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{6-x}{x}\right)^{\frac{1}{\ln\left(2-\frac{1}{3}x\right)}}$.

7.16. $\lim\limits_{x\to -2/5}\left(\frac{\cos(5x)}{\cos(2)}\right)^{\frac{1}{-5\ x-2}}$.

7.17. $\lim\limits_{x\to -1/8}\left(2\mathrm{e}^{-8x-1}-1\right)^{-\frac{8x}{-8\ x-1}}$.

7.18. $\lim\limits_{x\to -1/6}\left(2\mathrm{e}^{-12x-2}-1\right)^{\frac{-36x+2}{-12\ x-2}}$.

7.19. $\lim\limits_{x\to -2/13}\left(-\frac{1}{13}\frac{2+13x}{x}\right)^{\frac{1}{\ln(2+13x)}}$.

7.20. $\lim\limits_{x\to -1/15}\left(2\mathrm{e}^{-15x-1}-1\right)^{-\frac{15x}{-15\ x-1}}$.

7.21. $\lim\limits_{x\to 3}\left(1+e^{\frac{1}{3}x}\right)^{\frac{\sin\left(\frac{1}{3}\pi x\right)}{1-\frac{1}{3}x}}$.

7.22. $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}}{\left(\frac{2}{3}x-1\right)^2}\right)^{1+\frac{2}{3}x}$.

7.23. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{6}}\left(\frac{6x+1}{2+6x}\right)^{\frac{-36x^2+1}{1-6\ x}}$.

7.24. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\mathrm{e}^{6x}\right)^{\frac{\sin(6\pi x)}{6\ x}}$.

7.25. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x+2}{3+x}\right)^{-\frac{1-(x+1)^2}{x}}$.

7.26. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{4}\frac{\mathrm{e}^{4x^2}-1}{x^2}\right)^{\frac{6}{2x+1}}$.

7.27. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{9}\frac{\mathrm{e}^{9x^2}-1}{x^2}\right)^{\frac{6}{3x+1}}$.

7.28. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{4\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{4}x^2}-1\right)}{x^2}\right)^{\frac{6}{\frac{1}{2}x+1}}$.

7.29. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{9\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{9}x^2}-1\right)}{x^2}\right)^{\frac{6}{\frac{1}{3}x+1}}$.

7.30. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{25}\frac{\mathrm{e}^{25x^2}-1}{x^2}\right)^{\frac{6}{5x+1}}$.

Ответы. **7.16.** $\mathrm{e}^{\text{-tg}2}$. **7.17.** e^2. **7.18.** e^{16}. **7.19.** е. **7.20.** e^2.

Задача 8. Различные задачи.

8.1. Доказать по определению непрерывность функции $f(x)$ в точке $x=x_0$.

1) $f(x)=x^2-1,\ \ x_0=1$.

2) $f(x)=x^2-2x,\ \ x_0=0$.

3) $f(x)=3x^2+5,\ \ x_0=2$.

4) $f(x)=x^2+2x, x_0=1$.

5) $f(x)=x^3-1, x_0=1$.

8.2. Вычислить пределы функций.

1) $\lim\limits_{x\,\to\,0}\sqrt{5\cos 3x+x^2\operatorname{arctg}(1/x)}$.

2) $\lim\limits_{x\,\to\,\pi/2}\sqrt{5\sin 2x+(2x-\pi)\sin\frac{7x}{2x-\pi}}$.

3) $\lim\limits_{x\,\to\,\pi/4}\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}3x}+(4x-\pi)\cos\frac{5x}{4x-\pi}}{\ln(2+\operatorname{tg}x)}$.

4) $\lim\limits_{x\,\to\,-2}\sqrt{\frac{1+\cos\pi x}{4+(2x+4)\sin\frac{3x}{x+2}}}$.

5) $\lim\limits_{x\,\to\,0}\sqrt{5\cos 2x+\sin\frac{5}{3x}\cdot\ln(1+7x)}$.

8.3. Доказать принадлежность функции $f(x)$ к классу $O(1)\ (x\to 2)$.

1) $f(x)=2x-1$; 2) $f(x)=3x+1$; 3) $f(x)=(x-2)\sin\frac{2}{x-2}$;

4) $f(x)=(x-2)\cos\frac{5}{x-2}$; 5) $f(x)=\cos\frac{3}{x-2}$.

8.4. Доказать принадлежность функции $f(x)$ к классу $o(x)\ (x\to 0)$.

1) $f(x) = x^3 - 2x^2$; 2)$f(x) = (x+1)\sin\left(x^2\right)$;
3) $f(x) = (2x+1)\sin\left(x^2(x+3)\right)$;
4) $f(x) = x \cdot \arcsin 4x$; 5) $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg}\left(x^2 - 2x\right)$.

Теоретические упражнения

1. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$. Вытекает ли из существования $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|$ существование $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$?
   Указание. Доказать и использовать неравенство
   $||b| - |a|| \le |b - a|$.
2. Доказать, что последовательность $\{n^2\}$ расходится.
3. Сформулировать на языке «$\varepsilon - \delta$» утверждение: «Число A не является пределом в точке x_0 функции $f(x)$, определенной в окрестности точки x_0».
4. Доказать, что если $f(x)$ непрерывная функция, $F(x) = |f(x)|$ есь также непрерывная функция. Верно ли обратное утверждение?
5. Сформулировать на языке «$\varepsilon - \delta$» утверждение: «Функция $f(x)$, определенная в окрестности точки x_0, не является непрерывной в этой точке».
6. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \ne 0$, а $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$ не существует. Доказать, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\varphi(x)$ не существует.

Указание. Допустить противное и использовать теорему о пределе частного.

1. Пусть функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0, а функция $\varphi(x)$ не имеет предела. Будут ли существовать пределы:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + \varphi(x)]$; 2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\varphi(x)$?
Рассмотреть пример: $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x}$.

1. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \ne 0$, а функция $\varphi(x)$ бесконечно большая при $x \to x_0$. Доказать, что произведение $f(x)\varphi(x)$ является бесконечно большой функцией при $x \to x_0$.
2. Является ли бесконечно большой при $x \to 0$ функция $\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$?
3. Пусть $\alpha'(x) \sim \alpha(x)$ и $\beta'(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$. Доказать, что если $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}$ не существует, то $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ тоже не существует.

§2. Дифференцирование. Задачи

Задача 1. Исходя из определения производной, найти $f'(0)$.

1.1. $f(x) = \begin{cases} \arcsin\left(9x^2\cos\left(\frac{1}{27x}\right)\right) + 2x, \quad x \neq 0, \\ 0, x = 0. \end{cases}$

1.2. $f(x) = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{9}{4}x^2\cos\left(\frac{2}{27x}\right)\right) + x, \quad x \neq 0, \\ 0, x = 0. \end{cases}$

1.3. $f(x) = \begin{cases} \arcsin\left(25x^2\cos\left(\frac{1}{45x}\right)\right) + \frac{10}{3}x, \\ 0, x = 0. \end{cases}$

1.4. $f(x) = \begin{cases} \arcsin\left(49x^2\cos\left(\frac{1}{63x}\right)\right) + \frac{14}{3}x, \\ 0, x = 0. \end{cases}$

1.5. $f(x) = \begin{cases} \arcsin\left(16x^4\cos\left(\frac{1}{36x^2}\right)\right) + \frac{8}{3}x^2, \\ 0, x = 0. \end{cases}$

1.6. $f(x) = \begin{cases} \ln\left(1 - \sin\left(64x^6\sin\left(\frac{1}{4x^2}\right)\right)\right), \\ 0, x = 0. \end{cases}$

1.7. $f(x) = \begin{cases} \ln\left(1 - \sin\left(125x^3\sin\left(\frac{1}{5x}\right)\right)\right), \\ 0, x = 0. \end{cases}$

1.8. $f(x) = \begin{cases} \ln\left(1 - \sin\left(8x^3\sin\left(\frac{1}{2x}\right)\right)\right), \\ 0, x = 0. \end{cases}$

1.9. $f(x) = \begin{cases} \ln\left(1 - \sin\left(343x^3\sin\left(\frac{1}{7x}\right)\right)\right), \\ 0, x = 0. \end{cases}$

1.10. $f(x) = \begin{cases} \ln\left(1 - \sin\left(8x^6\sin\left(\frac{1}{2x^2}\right)\right)\right), \\ 0, x = 0. \end{cases}$

1.11. $f(x) = \begin{cases} -42x + 7x\sin\left(\frac{1}{7x}\right), \\ 0, x = 0. \end{cases}$

1.12. $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + \frac{1}{3}x^2\sin\left(\frac{3}{x^2}\right), \\ 0, x = 0. \end{cases}$

1.13. $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^4 + \frac{1}{4}x^4\sin\left(\frac{4}{x^4}\right), \\ 0, x = 0. \end{cases}$

1.14. $f(x) = \begin{cases} 3^{\frac{1}{4}x^8 \sin\left(\frac{4}{x^4}\right)} - 1 + x^4, \\ 0, x = 0. \end{cases}$

1.15. $f(x) = \begin{cases} 3^{9x^6 \sin\left(\frac{2}{3x^3}\right)} - 1 + 6x^3, \\ 0, x = 0. \end{cases}$

1.16. $f(x) = \begin{cases} \arcsin\left(100x^2 \cos\left(\dfrac{1}{90x}\right)\right) - \dfrac{20}{3}x, \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0. \end{cases}$

1.17. $f(x) = \begin{cases} \ln\left(1 - \sin\left(512x^3 \sin\left(\dfrac{1}{8x}\right)\right)\right), \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0. \end{cases}$

1.18. $f(x) = \begin{cases} \ln\left(1 - \sin\left(3375x^3 \sin\left(\dfrac{1}{15x}\right)\right)\right), \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0. \end{cases}$

1.19. $f(x) = \begin{cases} 3^{-225x^2 \sin\left(\frac{2}{15x}\right)} - 1 - 30\,x, \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0. \end{cases}$

1.20. $f(x) = \begin{cases} -66x + 11x \sin\left(\dfrac{1}{11x}\right), x \neq 0, \\ 0, \ x = 0. \end{cases}$

Исследовать на дифференцируемость функцию в указанных точках.

1.21. $|x^2 - 2x|; \ x = 0, \ x = 2.$

1.22. $|x^2 - 7x + 10|; \ x = 2, \ x = 5.$

1.23. $|x^3 - 10x^2 + 16x|; \ x = 0, x = 2, x = 8.$

1.24. $|\sin 2x|; \ \ x = \pi/2.$

1.25. $\left|\frac{x-1}{2x+1}\right|; \ \ x = 1.$

1.26. $\left|\frac{x^2-3x}{x^2+1}\right|; \ x = 0, \ x = 3.$

1.27. $\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-2x+2}\right|; \ \ x = 1, \ x = 4.$

1.28. $\left|\frac{2x^2-5x+2}{2x^2-2x+1}\right|; \ \ x = \frac{1}{2}, \ x = 2.$

1.29. $\left|\frac{x^2-x-2}{x^2+2x+2}\right|; \ \ x = -1, \ x = 2.$

1.30. $\left|\frac{9x^2-15x+4}{9x^2-6x+2}\right|; \ \ x = \frac{1}{3}, \ x = \frac{4}{3}.$

Ответы. **1.16-1.20.** 0.

Задача 2. Найти производную функции.

2.1. $y=\frac{81x^4-72x^2}{18x^2-8}$.

2.2. $y=\frac{\frac{1}{16}x^4-2x^2}{\frac{1}{2}x^2-8}$.

2.3. $y=\frac{\frac{81}{16}x^4-18x^2}{\frac{9}{2}x^2-8}$.

2.4. $y=\frac{1}{375}\frac{\left(50x^2-1\right)\sqrt{25x^2+1}}{x^3}$.

2.5. $y=\frac{1}{81}\frac{\left(18x^2-1\right)\sqrt{9x^2+1}}{x^3}$.

2.6. $y=\frac{1}{24}\frac{\left(8x^4-1\right)\sqrt{4x^4+1}}{x^6}$.

2.7. $y=\frac{1}{3}\frac{\left(2x^6-1\right)\sqrt{x^6+1}}{x^9}$.

2.8. $y=\frac{1}{3}\frac{\left(2x^2+8x+7\right)\sqrt{x^2+4x+5}}{(x+2)^3}$.

2.9. $y=\frac{1}{3}\frac{\left(2x^2-4x+1\right)\sqrt{x^2-2x+2}}{(x-1)^3}$.

2.10. $y=\frac{1}{100}\frac{\sqrt{5x-1}(15x+2)}{x^2}$.

2.11. $y=\frac{1}{36}\frac{\sqrt{-3x-1}(-9x+2)}{x^2}$.

2.12. $y=\frac{1}{4}\frac{\sqrt{x}(3x+5)}{(x+1)^2}$.

2.13. $y=\frac{1}{4}\frac{\sqrt{2x-2}(6x-1)}{(2x-1)^2}$.

2.14. $y=\frac{1}{15}\frac{3x^6+4x^4-x^2-2}{\sqrt{x^2+1}}$.

2.15. $y=\frac{1}{15}\frac{192x^6+64x^4-4x^2-2}{\sqrt{4x^2+1}}$.

2.16. $y=\frac{6561x^4-648x^2}{162x^2-8}$.

2.17. $y=-\frac{1}{1029}\frac{\left(98x^2-1\right)\sqrt{49x^2+1}}{x^3}$.

2.18. $y=\frac{1}{1764}\frac{\sqrt{-21x-1}(-63x+2)}{x^2}$.

2.19. $y=\frac{1}{15}\frac{192x^6+64x^4-4x^2-2}{\sqrt{4x^2+1}}$

2.20. $y=\frac{(x-1)^4-8(x-1)^2}{2(x-1)^2-8}$.

Найти производную функции $y=y(x)$ в точке $x=0$.

2.21. $y=\frac{2^{\sin^2 3x+2}}{\sqrt{3x-5x+2}}$.

2.22. $y=\frac{e^{3x^2+3x+2}}{\sqrt{\cos 3\pi x+2}}$.

2.23. $y=\frac{\log_3\left(5x^2+2x+4\right)}{\sqrt{3x-4x+5}}$.

2.24. $y=\frac{\ln(3x+2^x+4)}{\sqrt{3x^2+3x+5}}$.

2.25. $y=\frac{\arccos 21x+2}{\sqrt{1-4x+2x^2}}$.

2.26. $y=\frac{9\sin^2(x)-24\sin(x)}{6\sin(x)-8}$.

Найти производную функции $y=y(x)$ в произвольной точке x.

2.27. $y=\frac{625\ln^4(x)-200\ln^2(x)}{50\ln^2(x)-8}$.

2.28. $y=\frac{1}{3}\frac{\left(2\cos^2(x)-1\right)\sqrt{\cos^2(x)+1}}{\cos^3(x)}$.

2.29. $y=-\frac{1}{3993}\frac{\left(242x^2-1\right)\sqrt{121x^2+1}}{x^3}$.

2.30. $y=\frac{1}{144}\frac{\sqrt{6\sqrt{x}-1}(18\sqrt{x}+2)}{x}$.

Ответы. **2.16.** $\frac{81x\left(6561x^4-648x^2+32\right)}{(81x^2-4)^2}$. **2.17.** $-\frac{1}{343x^4\sqrt{49x^2+1}}$.
2.18. $-\frac{1}{3528}\frac{1323x^2-8}{\sqrt{-21x-1}x^3}$. **2.19.** $16\sqrt{4x^2+1}\cdot x^3$.
2.20. $\frac{(x-1)\left(x^4-4x^3-2x^2+12x+25\right)}{(x+1)^2(x-3)^2}$.

Задача 3. Найти дифференциал dy.

3.1. $y = 2x\ln\left(\left|2x+\sqrt{4x^2+3}\right|\right) - \sqrt{4x^2+3}.$

3.2. $y = x^2\ln\left(\left|x^2+\sqrt{x^4+3}\right|\right) - \sqrt{x^4+3}.$

3.3. $y = x^3\ln\left(\left|x^3+\sqrt{x^6+3}\right|\right) - \sqrt{x^6+3}.$

3.4. $y = \sqrt{x}\ln\left(\left|\sqrt{x}+\sqrt{x+3}\right|\right) - \sqrt{x+3}.$

3.5. $y = x^{1/3}\ln\left(\left|x^{1/3}+\sqrt{x^{2/3}+3}\right|\right) - \sqrt{x^{2/3}+3}.$

3.6. $y = \arccos\left(\frac{1}{18}\frac{\left(9x^2-1\right)\sqrt{2}}{x^2}\right).$

3.7. $y = \arccos\left(\frac{1}{2}\frac{\left(x^6-1\right)\sqrt{2}}{x^6}\right).$

3.8. $y = \arccos\left(\frac{1}{2}\frac{\left(x^4-1\right)}{x^4}\right).$

3.9. $y = \operatorname{tg}\left(\frac{9x^2-1}{3x}\right).$

3.10. $y = \operatorname{tg}\left(\frac{x^2-4}{2x}\right).$

3.11. $y = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+4x^2}-1}{2x}.$

3.12. $y = \arccos\frac{x^2-9}{\sqrt{x^4+81}}.$

3.13. $y = \sqrt[3]{\frac{3x+2}{3x-2}}.$

3.14. $y = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{3x}{2}+1\right).$

3.15. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{sh}3x) +$
$+ (\operatorname{sh}3x)\ln(\operatorname{ch}3x).$

3.17. $y = \arccos\left(\frac{1}{18}\frac{\left(9x^2-1\right)\sqrt{2}}{x^2}\right).$

3.18. $y = -\operatorname{tg}\left(\frac{1}{5}\frac{25x^2-1}{x}\right).$

3.19. $y = -4x\ln\left(\left|4x-\sqrt{16x^2+3}\right|\right) -$
$-\sqrt{16x^2+3}.$

3.16. $y = -4x\ln\left(\left|4x-\sqrt{16x^2+3}\right|\right) -$
$-\sqrt{16x^2+3}.$

3.20. $y = \arccos\left(\frac{1}{288}\frac{\left(144x^2-1\right)\sqrt{2}}{x^2}\right).$

Используя логарифмическое дифференцирование, найти производные следующих функций (без упрощения выражения для производной):

3.21. $y=\sqrt[7]{\frac{\mathrm{tg}^2(x+1)\sqrt[5]{7x+1}}{(x+1)\left((x+1)^3+5\right)^2\ln(x+1)}}$.

3.22. $y=\sqrt[4]{\frac{(x+1)\sqrt{\ln^3(x+1)\cdot\cos(x+1)}}{(x+2)^5\sqrt[3]{8-3x}}}$.

3.23. $y=\sqrt[6]{\frac{(x+1)^2\sin(x+1)\sqrt{x+5}}{(x+2)^3\sqrt{\ln^5(x+1)}}}$.

3.24. $y=\sqrt[9]{\frac{\mathrm{arctg}^2(x+1)\sqrt{x+9}}{(x+1)^7(3x+1)^4\ln(x+1)}}$.

3.25. $y=\sqrt[8]{\frac{(x+1)\ln^3(x+1)\sqrt{x+9}}{(\mathrm{ctg}x+1)(2x+5)^5}}$.

Найти производную функции $y=y(x)$ в произвольной точке x.

3.26. $y=\ln\left(\mathrm{e}^{\sqrt{x}-1}+1\right)+\frac{18\mathrm{e}^{2\sqrt{x}-2}+27\mathrm{e}^{\sqrt{x}-1}+11}{6\left(\mathrm{e}^{\sqrt{x}-1}+1\right)^3}$.

3.27. $y=\arccos\left(\frac{1}{50}\frac{(25x-1)\sqrt{2}}{x}\right)$.

3.28. $y=\ln\left(\mathrm{e}^{\sqrt{x}+3}+1\right)+\frac{18\mathrm{e}^{2\sqrt{x}+6}+27\mathrm{e}^{\sqrt{x}+3}+11}{6\left(\mathrm{e}^{\sqrt{x}+3}+1\right)^3}$.

3.29. $y=\mathrm{tg}\left(\frac{(5\sqrt{x}+1)^2-1}{5\sqrt{x}+1}\right)$.

3.30. $y=\mathrm{tg}\left(\frac{(7\sqrt{x}-1)^2-1}{7\sqrt{x}-1}\right)$.

Ответы. **3.16.** $-4\ln\left(-4x+\sqrt{16x^2+3}\right)dx$. **3.17.** $-\frac{2dx}{x\sqrt{81x^4+18x^2-1}}$. **3.18.** $-\frac{1}{5}\frac{25x^2+1}{x^2\cos^2\left(\frac{1}{5}\frac{25x^2-1}{x}\right)}dx$. **3.19.** $-\frac{1}{5}\frac{\left(25x^2+1\right)dx}{x^2\cos^2\left(\frac{1}{5}\frac{25x^2-1}{x}\right)}$. **3.20.** $-\frac{2dx}{x\sqrt{20736x^4+288x^2-1}}$.

Задача 4. Найти производную функции.

4.1. $y=\ln(x)+\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}$.

4.2. $y=\sin\left(3x^2+1\right)+\frac{x^6+8x^3-128}{\sqrt{8-x^3}}$.

4.3. $y=\cos\left(x^3+2x\right)+\frac{\sqrt{2x+3}(x-2)}{x^2}$.

4.4. $y=\frac{1}{243}\frac{\left(18x^2+3\right)\sqrt{9x^2-3}}{x^3}$.

4.5. $\frac{1}{9}\frac{\left(2\ln(x)^2+3\right)\sqrt{\ln(x)^2-3}}{\ln(x)^3}$.

4.6. $y=\frac{1}{9}\frac{\left(2\mathrm{e}^{4x}+3\right)\sqrt{\mathrm{e}^{4x}-3}}{(\mathrm{e}^{2x})^3}$.

4.7. $y=\frac{3\left(9x^2+3x+1\right)^{1/3}}{3x+1}$.

4.8. $y=3\left(\frac{x}{(x-2)^2}\right)^{1/3}$.

4.9. $3\left(\frac{2x+1}{(2x-1)^2}\right)^{1/3}$.

4.10. $y=\frac{27x+3\sqrt{x}}{\sqrt{81x^2+2}}$.

4.11. $y=\frac{2x+7}{6\sqrt{4x^2+4x+7}}$.

4.12. $y=\frac{x\sqrt{2x+1}}{4x^2+4x+1}$.

4.13. $y=\frac{9x^2+2}{2\sqrt{1-81x^4}}$.

4.14. $y=\frac{(5x+3)\sqrt{10x-1}}{10x+7}$.

4.15. $y=\frac{6x+\sqrt{2x}}{\sqrt{4x^2+2}}$.

4.16. $y=-\frac{1}{3087}\frac{\left(98x^2+3\right)\sqrt{49x^2-3}}{x^3}$.

4.17. $y=\frac{3\left(36x^2-6x+1\right)^{1/3}}{-6\ x+1}$.

4.18. $y=3\left(\frac{-7x+1}{(-7x-1)^2}\right)^{1/3}$.

4.19. $y=\frac{12x+2\sqrt{x}}{\sqrt{16x^2+2}}$.

4.20. $y=-\frac{1}{1125}\frac{\left(50x^2+3\right)\sqrt{25x^2-3}}{x^3}$.

4.21. $y=\log_2^4\sqrt{\arccos\sqrt{1-3^{8x+1}}}$.

4.22. $y=\frac{1}{\log_4\arccos\sqrt{2\sqrt{2x+1}}}$.

4.23. $y=\log_3^6\sqrt[5]{\operatorname{arctg}\sqrt{2x^2-1}}$.

4.24. $y \quad =\frac{10}{\sqrt[3]{\ln\left(\arccos\sqrt{2x+1}\right)^{125}}}$.

4.25. $\sqrt[5]{\ln\left(\operatorname{arcctg}\sqrt{2x+1}-1\right)^{32}}$.

4.26. $y=\frac{1}{4(1+x^4)}+\ln\left(\frac{x^4}{1+x^4}\right)$.

4.27. $y=-\frac{1}{1944}\frac{\left(72x^2+3\right)\sqrt{36x^2-3}}{x^3}$.

4.28. $y=\frac{\left(2x^4+20x^2+53\right)\sqrt{x^4+10x^2+22}}{9(x^2+5)^3}$.

4.29. $y=3\left(\frac{6\sqrt{x+1}+1}{\left(6\sqrt{x+1}-1\right)^2}\right)^{1/3}$.

4.30. $y=\frac{1}{324x^2+4}+\ln\left(\frac{81x^2}{81x^2+1}\right)$.

Ответы. **4.16.** $-\frac{3}{343x^4\sqrt{49x^2-3}}$. **4.17.** $\frac{12\left(18x^2+1\right)}{(36x^2-6x+1)^{2/3}(6x-1)^2}$. **4.18.** $\frac{7(7x-3)}{(7x+1)(-49x^2+1)^{2/3}}$. **4.19.** $\frac{-8x^2+12\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(8x^2+1)\sqrt{16x^2+2}}$. **4.20.** $-\frac{3}{125x^4\sqrt{25x^2-3}}$.

Задача 5. Найти производную функции.

5.1. $y=\left(x^2+2x\right)^{\operatorname{sh}(x+1)}$.

5.2. $y=\left(x^4+4x^3+6x^2\right)+$
$+(4x+6)^{\operatorname{ctg}(x+1)}$.

5.3. $y=(\sin(x+1))^{3x+3}$.

5.4. $y=\left(x^2+2x+2\right)^{\cos(x+1)}$.

5.5. $y=19^{(x+1)^{19}}(x+1)^{19}$.

5.6. $y=(x+1)^{3^{x+1}}2^{x+1}$.

5.7. $y=\left(x^2+1\right)^{3^{x+1}}\cdot 2^{x^3+1}$.

5.8. $y=(\sin(x+1))^{\frac{5}{2}x+\frac{5}{2}}$.

5.9. $y=\left(x^2+2x+2\right)^{\cos(x+1)}$.

5.10. $y=(x+1)^{e^{\cos(x+1)}}$.

5.11. $y=(x+1)^{2^{x+1}}5^{x+1}$.

5.12. $y=(3x)^{e^{\sin(3x)}}$.

5.13. $y=(\operatorname{tg}(3x))^{\frac{1}{4}\ln(\operatorname{tg}(3x))}$.

5.14. $y=\left(6561x^8+1\right)^{\operatorname{tg}(3x)}$.

5.15. $y=19683\,(3x)^{e^{3x}}x^9$.

5.16. $y=\left(x^2+1\right)^{\ln(x)}$.

5.17. $y=(\ln(x)+x)^{x^2}$.

5.18. $y=\left(\sin(x)+x^2\right)^{\cos(x)}$.

5.19. $y=\left(\sin(3x)+9x^2\right)^{\cos(3x)}$.

5.20. $y=\left((x+1)^2+1\right)^{\ln(x+1)}$.

5.21. $y=\left(\sqrt[4]{3x}+1\right)^{\sin\frac{3x}{2}}$.

5.22. $y=x^{\cos^5 3x}\cdot(\arcsin 3x)^{4x}$.

5.23. $y=\left(3x^2+1\right)^{\sin 2x}\cdot(\cos 3x)^{3x^3}$.

5.24. $y=\left(3x^4-1\right)^{\ln x}$.

5.25. $y=\left(\sin\frac{6x}{5}\right)^{3x}$.

5.26. $y=\left(x^3+\ln(x)\right)^{\cos(3x)-x}$.

5.27. $y=(1+3\sin(x))^{x^2\ln(x)}$.

5.28. $y=\left(x^2+e^{3x}\right)^{x^2\operatorname{tg}(x)}$.

5.29. $y=(x\cos(3x)+\sin(x))^{5x+\sqrt{x}}$.

5.30. $y=\left(4x+\sqrt{x+1}\right)^{e^{\sqrt{x}-1}}$.

Ответы. **5.16.** $\left(x^2+1\right)^{\ln(x)}\left(\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}+\frac{2\ln(x)x}{x^2+1}\right)$.

5.17. $(\ln(x)+x)^{x^2}\left(2x\ln(\ln(x)+x)+\frac{x^2\left(\frac{1}{x}+1\right)}{\ln(x)+x}\right)$.

5.18. $y\cdot\left(-\sin(x)\ln\left(\sin(x)+x^2\right)+\frac{\cos(x)(\cos(x)+2x)}{\sin(x)+x^2}\right)$.

5.19. $y\cdot\left(-3\sin(3x)\ln\left(\sin(3x)+9x^2\right)+\frac{\cos(3x)(3\cos(3x)+18x)}{\sin(3x)+9x^2}\right)$.

5.20. $\left((x+1)^2+1\right)^{\ln(x+1)}\left(\frac{\ln\left((x+1)^2+1\right)}{x+1}+\frac{\ln(x+1)(2x+2)}{(x+1)^2+1}\right)$.

Задача 6. Найти производную функции.

6.1. $y=\sqrt{(4+2x)(1+2x)}+3\ln\left(\sqrt{4+2x}+\sqrt{1+2x}\right)$.

6.2. $y=\sqrt{-8x^2-6x+1}+\frac{3}{4}\sqrt{2}\arcsin\left(\frac{1}{17}(8x+3)\sqrt{17}\right)$.

6.3. $y=\sqrt{(4+6x)(1+6x)}+3\ln\left(\sqrt{4+6x}+\sqrt{1+6x}\right)$.

6.4. $y=\frac{\arcsin(2x)}{\sqrt{-4x^2+1}}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)$.

6.5. $y=\frac{1}{4}\frac{\sqrt{4x^2+2}}{x^2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\ln\left(\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}+\sqrt{4x^2+2}}{x}\right)$.

6.6. $y=(2+12x)\sqrt{4x-1}-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{4x-1}\right)$.

6.7. $y=\left(\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}\right)\sqrt{1+4x}+\ln\left(\sqrt{1+4x}+1\right)$.

6.8. $y=\sqrt{16x^2+1}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{16x^2+1}-4x}{\sqrt{16x^2+1}+4x}\right)$.

6.9. $y=\left(\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}\right)\sqrt{1+4x}+\ln\left(\sqrt{1+4x}+1\right)$.

6.10. $y=\sqrt{144x^2+1}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{144x^2+1}-12x}{\sqrt{144x^2+1}+12x}\right)$.

6.11. $y=(2+15x)\sqrt{5x-1}-\frac{3}{2}\arctan\left(\sqrt{5x-1}\right)$.

6.12. $y=\sqrt{25x^2+1}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{25x^2+1}-5x}{\sqrt{25x^2+1}+1}\right)$.

6.13. $y=\left(\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}\right)\sqrt{1+5x}+\ln\left(\sqrt{1+5x}+1\right)$.

6.14. $y=\arctan\left(\sqrt{25x^2-1}\right)-\frac{\ln(5x)}{\sqrt{25x^2-1}}$.

6.15.$y=\sqrt{225\,x^2+1}-1/2\,\ln\left(\frac{\sqrt{225\,x^2+1}-15\,x}{\sqrt{225\,x^2+1}+1}\right)$.

6.16. $y=\left(-\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\right)\sqrt{-2x+1}+\ln\left(\sqrt{-2x+1}+1\right)$.

6.17. $y=\operatorname{arctg}\left(\sqrt{4x^2-1}\right)-\frac{\ln(-2x)}{\sqrt{4x^2-1}}$.

6.18. $y=\sqrt{36x^2+1}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{36x^2+1}+6x}{\sqrt{36x^2+1}+1}\right)$.

6.19. $y=-\frac{\arcsin(3x)}{\sqrt{-9x^2+1}}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3x+1}{-3x+1}\right)$.

6.20. $y=\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{-x^2+1}}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right)$.

6.21. $y=\frac{2x-1}{4}\sqrt{2+x-x^2}+\frac{9}{8}\arcsin\frac{2x-1}{3}$.

6.22. $y=\sqrt{-x^2+1}-\frac{x^2}{\sqrt{-x^2+1}}+\frac{2}{3}\frac{\ln\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}$.

6.23. $y=2x\arcsin\left(\sqrt{x-1}\right)+\frac{1}{2}\frac{x^2+1}{\sqrt{x-1}\sqrt{2-x}}$.

6.24. $y=4x^3\operatorname{arctg}(3x+1)+\frac{3\left(x^4+1\right)}{1+(3x+1)^2}$.

6.25. $y=3x^2\arccos(5x+1)-\frac{5\left(x^3+1\right)}{\sqrt{1-(5x+1)^2}}$.

6.26. $y=(2+21\,x)\sqrt{7\,x-1}-3/2\,\arctan\left(\sqrt{7\,x-1}\right)$.

6.27. $y=1/3\,\ln\left(\frac{7\,x-1}{1+7\,x}\right)-\left(1/4+\left(98\,x^2-2\right)^{-1}\right)\arctan(7\,x)$.

6.28. $y=(7/3\,x-2/3)\sqrt{1+7\,x}+\ln\left(\sqrt{1+7\,x}+1\right)$.

6.29. $y=\sqrt{441\,x^2+1}-1/2\,\ln\left(\frac{\sqrt{441\,x^2+1}-21\,x}{\sqrt{441\,x^2+1}+1}\right)$.

6.30. $y=\arctan\left(\sqrt{49\,x^2-1}\right)-\frac{\ln(7\,x)}{\sqrt{49\,x^2-1}}$.

Ответы. **6.16.** $\frac{2x\sqrt{-2x+1}+2x-1}{\sqrt{-2x+1}\left(\sqrt{-2x+1}+1\right)}$. **6.17.** $\frac{4\ln(-2x)x}{\left(4x^2-1\right)^{3/2}}$. **6.18.** $\frac{3\left(12x\sqrt{36x^2+1}-\sqrt{36x^2+1}+18x-1\right)}{\sqrt{36x^2+1}\left(\sqrt{36x^2+1}+1\right)}$ **6.19.** $-\frac{9\arcsin(3x)x}{\left(-9x^2+1\right)^{3/2}}$. **6.20.** $\frac{\arcsin(x)x}{\left(-x^2+1\right)^{3/2}}$.

Задача 7. Найти производную n-го порядка.

7.1. $y=\sin(10x)+\cos(1+5x)$.

7.2. $y=5x\mathrm{e}^{15x}$.

7.3. $y=\left(e^{35x-1}\right)^{1/5}$.

7.4. $y=\frac{20x+7}{10x+3}$.

7.5. $y=\frac{5x}{4+30x}$.

7.6. $y=a^{15x}$.

7.7. $y=\frac{\ln(4+5x)}{\ln(10)}$.

7.8. $y=\sqrt{5\,x}$.

7.9. $y=\frac{10x+5}{13+195x}$.

7.10. $y=(x+1)\,\mathrm{e}^{3x+3}$.

7.11. $y=\left(e^{7x+6}\right)^{1/5}$.

7.12. $y=\frac{4x+11}{2x+5}$.

7.13. $y=\sqrt{x+1}$.

7.14. $y=\sin(2x+2)+\cos(2+x)$.

7.15. $y=\frac{2x+7}{52+39x}$.

7.16. $y=\mathrm{e}^x\cdot\sin(\,x)$.

7.17. $y=\mathrm{e}^x\cdot\cos(x)$.

7.18. $y=\frac{2x+1}{3x-\ 1}$.

7.19. $y=(2\ x+1)\cdot\mathrm{e}^x$.

7.20. $y=\sin(10x)+\cos(1+5x)$.

7.21. $y=3^{4-7x}+\frac{3}{5x^2-14x+9}$.

7.22. $y=\sin(5x+1)-\ln\left(9x^2-2x-11\right)$.

7.23. $y=\frac{3}{7x^2-5x-18}+e^{1-6x}$.

7.24. $y=\sqrt{(7x+5)^{2n+9}}-\sin 5x\sin 2x$

7.25. $y=\sin^3 x+\frac{1}{8x^2-7x-1}$.

7.26. $y=-\sin(10x)+\cos(5x-1)$.

7.27. $y=\frac{-20x+7}{-10x+3}$.

7.28. $y=\frac{\ln(-25x+2)}{\ln(10)}$.

7.29. $y=\left(e^{-35x-1}\right)^{1/5}$.

7.30. $y=\frac{-10x+5}{-195x+13}$.

Ответы. **7.16.** $\mathrm{e}^x 2^{\frac{1}{2}n} \sin\left(x + \frac{1}{4}n\pi\right)$.
7.17. $\mathrm{e}^x 2^{\frac{1}{2}n} \cos\left(x + \frac{1}{4}n\pi\right)$.
7.18. $-\frac{5(-1)^{-1+n} n! 3^{-1+n}}{(3x-1)^{1+n}}$.
7.19. $(2n + 2x + 1)\,\mathrm{e}^x$.
7.20. $\sin\left(10x + \frac{1}{2}n\pi\right) 10^n + \cos\left(1 + 5x + \frac{1}{2}n\pi\right) 5^n$.

Задача 8. Найти производную y'_x.

8.1. $\begin{cases} x = \left(1 + \cos^2 3t\right)^2, \\ y = \frac{\cos 3t}{\sin^2 3t}. \end{cases}$

8.2. $\begin{cases} x = \ln \frac{1-t^2}{1+t}, \\ y = \sqrt{1 - t^4}. \end{cases}$

8.3. $\begin{cases} x = \arccos \frac{1}{t+1}, \\ y = \sqrt{t^2 + 2t} + \arcsin \frac{1}{t+1}. \end{cases}$

8.4. $\begin{cases} x = \frac{1}{\ln 5t}, \\ y = \ln \frac{1+\sqrt{1-25t^2}}{5t}. \end{cases}$

8.5. $\begin{cases} x = \arcsin \sqrt{t-1}, \\ y = \sqrt{1 + \sqrt{t-1}}. \end{cases}$

5.6. $\begin{cases} x = \left(\arcsin t^3\right)^2, \\ y = \frac{t^3}{\sqrt{1-t^6}}. \end{cases}$

8.7. $\begin{cases} x = 2t\sqrt{4t^2 + 1}, \\ y = \ln \frac{1+\sqrt{1+4t^2}}{2t}. \end{cases}$

8.8. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} 5t, \\ y = \ln \frac{\sqrt{1+25t^2}}{5t+1}. \end{cases}$

8.9. $\begin{cases} x = \ln\left(-t^2 - 2t\right), \\ y = \arcsin \sqrt{-t^2 - 2t}. \end{cases}$

8.10. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{2t-1}, \\ y = \arcsin \sqrt{1 - 4t^2}. \end{cases}$

8.11. $\begin{cases} x = \ln \sqrt{\frac{1-\sin 2t}{1+\sin 2t}}, \\ y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 2t + \ln \cos 2t. \end{cases}$

8.12. $\begin{cases} x = \sqrt{2t-4t^2} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-2t}{2t}}, \\ y = \sqrt{2t} - \sqrt{1-2t}\arcsin\sqrt{2t}. \end{cases}$

8.13. $\begin{cases} x = \ln(\operatorname{tg} 3t), \\ y = \frac{1}{\sin^2 3t}. \end{cases}$

8.14. $\begin{cases} x = \frac{9t^2\ln 3t}{1-9t^2} + \ln\sqrt{1-9t^2}, \\ y = \frac{3t}{\sqrt{1-9t^2}}\arcsin 3t + \ln\sqrt{1-9t^2}. \end{cases}$

8.15. $\begin{cases} x = e^{\sec^2 2t}, \\ y = \operatorname{tg} 2t \cdot \ln\cos 2t + \operatorname{tg} 2t - 2t. \end{cases}$

8.16. $\begin{cases} x = \sin(2\ t), \\ y = \mathrm{e}^{3\ t+1}. \end{cases}$

8.17. $\begin{cases} x = \ln\left(1+t^2\right), \\ y = \sqrt{1+t^3}. \end{cases}$

8.18. $\begin{cases} x = \dfrac{6\ t+1}{6\ t-1}, \\ y = \arcsin\sqrt{1-12\ t^2}. \end{cases}$

8.19. $\begin{cases} x = \ln(6\ t), \\ y = \dfrac{1}{\sin^2(6\ t)}. \end{cases}$

8.20. $\begin{cases} x = \mathrm{e}^{2\ t}\cos^2(t), \\ y = \mathrm{e}^{2\ t}\sin^2(t). \end{cases}$

8.21. $\begin{cases} x = 2t + \sin(t), \\ y = t^4 + \cos(t). \end{cases}$

8.22. $\begin{cases} x = 2t + 6 + \sin(t+3), \\ y = (t+3)^4 + \cos(t+3). \end{cases}$

8.23. $\begin{cases} x = \mathrm{e}^t + \sin(t), \\ y = \ln\left(t^4\right) + \cos(t). \end{cases}$

8.24. $\begin{cases} x = \sqrt{t}\sin(t), \\ y = \ln\left(t^4\right) + \cos(t). \end{cases}$

8.25. $\begin{cases} x = 3t - \arcsin(t), \\ y = t^2 + \arccos(t). \end{cases}$

Найти производную от функции $y(x)$, заданной неявно.

8.26. $y + \arcsin y = (2x+1)^2$.

8.27. $\frac{(2x-1)^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

8.28. $x \ln y + y \ln(3x) = 1$.

8.29. $3xy^2 + 9x^2 y = 4$.

8.30. $\cos(5xy) + 5xy = 1$.

Ответы. **8.16.** $\frac{3}{2}\frac{\mathrm{e}^{3t+1}}{\cos(2t)}$. **8.17.** $\frac{3}{4}\frac{t\left(t^2+1\right)}{\sqrt{t^3+1}}$. **8.18.** $\frac{1}{6}\frac{\sqrt{3}(6t-1)^2}{\sqrt{-12t^2+1}}$. **8.19.** $-\frac{12t\cos(6t)}{\sin^3(6t)}$. **8.20.** $-\frac{\sin(t)(\sin(t)+\cos(t))}{\cos(t)(\sin(t)-\cos(t))}$.

Задача 9. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя.

9.1. $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\cos 7x + \cos 2x}{tg^2 10x}$.

9.2. $\lim\limits_{x\to\pi/6} \frac{\cos 3x}{(3^{x-\pi/6}-1)}$.

9.3. $\lim\limits_{x\to 0} (1 - 2\sin x)^{(1-\cos 3x)^{-1}}$.

9.4. $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{e^x(\cos 4x - 1)}{\cos 6x - 1}$.

9.5. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\pi x^2}{e^{\sin \pi x^3}-1}$.

9.6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{\ln(2-\cos^2 x)}$.

9.7. $\lim\limits_{x\to\infty} (2\cos^2\frac{1}{2x} - 1)^{x^2}$.

9.8. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2^{1+2x}-2}{(\ln(1+3x))}$.

9.9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^8+1} - \sqrt[3]{8x^8+3x+1}}{cos^2(1/x)}$.

9.10. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-2\sin^2\frac{\pi x}{4}}{1-\sqrt{x}}$.

9.11. $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{(x^3-\pi^3)5x}{e^{1-\cos 2x}-1}$.

9.12. $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{1-2\sin^2(3x/4)}{e^{x-\pi}-\sin(17\pi/2)}$.

9.13. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(\cos(1/x))}{2^{1/x^2}-1}$.

9.14. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4+2x+1} - \sqrt[3]{x^3+3x}}{e^{1/x}-1}$.

9.15. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}\right)$

9.16. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^x - x}{\ln(x)-x+1}$.

9.17. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{\pi} \cdot \operatorname{arctg}(3\ x)\right)^{3\ x}$.

9.18. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\arcsin(2\ x)}{2\ x}\right)^{\frac{1}{4\ x^2}}$.

9.19. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos\left(9\ x^2\right)}{x^2\cdot\sin(x^2)}$.

9.20. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\sin(3\ x))}{\ln(\sin(5\ x))}$.

9.21. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} (2-3x)^{\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi x\right)}$.

9.22. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}(x)}-1}{\cos(2\ x)}$.

9.23. $\lim\limits_{x\to 1} (2-x)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\cdot x}{2}\right)}$.

9.24. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2-x}}$.

9.25. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^x - x}{\ln(x)-x+1}$.

9.26. $\lim\limits_{x\to 2/11} \frac{\ln\left(-242x^2+9\right)}{\sin(22\pi x)}$.

9.27. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3^{10x}-7^{5x}}{\arcsin(15x)-25x}$.

9.28. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1-x\cdot 2^{-x}}{1-x\cdot 3^{-x}}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

9.29. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+x\sin(x)}{1-\cos(x)}$.

9.30. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{25x^2+5x\sin(5x)}{1-\cos(5x)}$.

Ответы. **9.16.** -2 **9.17.** $e^{-2/\pi}$. **9.18.** $e^{1/6}$. **9.19.** $81/2$. **9.20.** 1.

Теоретические упражнения

1. Исходя из определения производной, доказать, что

   (a) а) производная периодической дифференцируемой функции есть функция периодическая;

   (b) б) производная четной дифференцируемой функции есть функция нечетная;

   (c) в) производная нечетной дифференцируемой функции есть функция четная.

2. Доказать, что если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = 0$ и $f(0) = 0$, то $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$.

3. Доказать, что производная $f'(0)$ не существует, если

4. $f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

5. Доказать, что производная от функции

6. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

7. разрывна в точке $x = 0$.

8. Доказать приближенную формулу

   (a) $\sqrt{a^2 + z} \approx a + z/(2a), \quad a > 0, \quad |z| \ll a.$

9. Что можно сказать о дифференцируемости суммы $f(x) + g(x)$ в точке $x = x_0$ если, в этой точке:

10. а) функция $f(x)$ дифференцируема, а функция $g(x)$ не дифференцируема;

11. б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ не дифференцируемы.

12. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, а функция $g(x)$ не дифференцируема в этой точке. Доказать, что произведение $f(x)g(x)$ является недифференцируемым в точке x_0.

13. Что можно сказать о дифференцируемости произведения $f(x)\,g(x)$ в предположениях задачи?

    (a) Рассмотреть примеры:

    (b) а) $f(x) = x,\;\; g(x) = |x|\,,\;\; x_0 = 0;$

    (c) $f(x) = x,\;\; g(x) = \begin{cases} \sin(1/x)\,, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$

    (d) б) $f(x) = |x|\,,\;\; g(x) = |x|\,,\;\; x_0 = 0;$

    (e) $f(x) = |x|\,,\;\; g(x) = |x| + 1,\;\; x_0 = 0.$

14. Найти $f'(0)$, если $f(x) = x(x+1)\ldots(x+1234567)$.

15. Выразить дифференциал d^3y от сложной функции $y[u(x)]$ через производные от функции $y(u)$ и дифференциалы от функции $u(x)$.

16. Пусть $y(x)$ и $x(y)$ дважды дифференцируемые взаимно обратные функции. Выразить x'' через y' и y''.

§3. Графики. Задачи

Задача 1. Построить графики функций с помощью производной первого порядка[6].

1.1. $y = 8x^3 - 6\,x$.

1.2. $y = 16x\left(-x-1\right)^4$.

1.3. $y = 8x^3 + 12x^2 - 2$.

1.4. $y = -2x^3 + 9x^2 - 12\,x$.

1.5. $y = \left(2x+1\right)^2\left(2x+3\right)^2$.

1.6. $y = 1 - \left(x^2 - 2x\right)^{1/3}$.

1.7. $y = -4x + 8 - 6\left(\left(-x+2\right)^2\right)^{1/3}$.

1.8. $y = \left(x\left(x+2\right)\right)^{1/3}$.

1.9. $y = \frac{36^{1/3}\left(\left(-x-1\right)^2\right)^{1/3}}{2x^2-4\,x+18}$.

1.10. $y = 3\left(\left(-x+4\right)^2\right)^{1/3} + 2x - 8$.

1.11. $y = -216x^3 + 18x$.

1.12. $y = 54x^3 + 81x^2 + 36x$.

1.13. $y = 1 - \left(9x^2 + 6x\right)^{1/3}$.

1.14. $y = -216x^3 + 108x^2 - 2$.

1.15. $y = 12x + 8 - 6\left(\left(3x+2\right)^2\right)^{1/3}$.

1.16. $y = 216x^3 - 18\,x$.

1.17. $y = (-6x-1)^2(-6x-3)^2$.

1.18. $y = 1 - \sqrt[3]{9\,x^2 - 6\,x}$.

1.19. $y = -2x^3 + 9x^2 - 12\,x$.

1.20. $y = \sqrt[3]{-x\ \ (-x-2)}$.

1.21. $y = 8\,x^3 - 24x^2 + 18x - 2$.

1.22. $y = -2\,x^3 + 15x^2 - 36\,x + 23$.

1.23. $y = (2x-1)^2(2x+1)^2$.

1.24. $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$.

1.25. $y = 8x^3 - 12x^2 + 2$.

1.26. $y = 2\,x - \frac{8}{27}\,x^3$.

---

[6]Здесь и всюду далее ответы к последним пяти номерам см. в конце расчета.

1.27. $y = 4/3\,x^2 - \frac{8}{27}\,x^3 - 2$.
1.28. $y = \frac{2}{27}\,x^3 + x^2 + 4\,x$.
1.29. $y = \frac{2}{27}\,x^3 + x^2 + 4\,x$.
1.30. $y = 1 - \sqrt[3]{1/9\,x^2 + 2/3\,x}$.

Задача 2. Исследовать поведение функций в окрестностях заданных точек с помощью производных высших порядков.

2.1. $y = 6\,\mathrm{e}^{2x} - 8x^3 - 12x^2 - 12x - 5, x_0 = 0$.
2.2. $y = 4\,x^2 - 4x - 2\mathrm{e}^{2x-2}, x_0 = 1$.
2.3. $y = \cos{(2x-1)}^2 + 4x^2 - 4x, x_0 = \frac{1}{2}$.
2.4. $y = 6\,\mathrm{e}^{2x+1} - 8x^3 - 24x^2 - 30x - 16, x_0 = -\frac{1}{2}$.
2.5. $y = 4\,x^2 - 2\mathrm{e}^{2x-1}, x_0 = \frac{1}{2}$.
2.6. $y = \sin{(2x)} + \mathrm{sh}\,(2x) - 4x, x_0 = 0$.
2.7. $y = 4\,x^2 - 4x - 2\mathrm{e}^{2x-2}, x_0 = 1$.
2.8. $y = 4\,x^2 - 8x + \cos{(2x-2)}^2, x_0 = 1$.
2.9. $y = 6\mathrm{e}^{-x} + x^3 - 3x^2 + 6x - 5, x_0 = 0$.
2.10. $y = x^2 + 2x - 2\mathrm{e}^{-x-2}, x_0 = -2$.
2.11. $y = \cos{(x+1)}^2 + x^2 + 2x, x_0 = -1$.
2.12. $y = x^2 - 2\mathrm{e}^{-x-1}, x_0 = -1$.
2.13. $y = x^2 + 2x - 2\mathrm{e}^{-x-2}, x_0 = -2$.
2.14. $y = x^2 + 4x + \cos{(x+2)}^2, x_0 = -2$.
2.15. $y = -\sin{(x)} - \mathrm{sh}\,(x) + 2x, x_0 = 0$.
2.16. $y = 6\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - 3\,x - 5,\ x_0 = 0$.
2.17. $y = \frac{1}{4}x^2 - x - 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x-2},\ x_0 = 4$.
2.18. $y = \sin{\left(\frac{1}{2}x\right)} + \mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}x\right) - x, \quad x_0 = 0$.
2.19. $y = \frac{1}{4}x^2 - 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x-1}, x_0 = 2$.
2.20. $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + \cos{\left(\frac{1}{2}x - 2\right)}^2,\ x_0 = 4$.
2.21. $y = 6\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} - \frac{27}{8}x^3 - \frac{27}{4}x^2 - 9\,x - 5, x_0 = 0$.
2.22. $y = \frac{9}{4}x^2 - 3x - 2\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x-2}, x_0 = \frac{4}{3}$.
2.23. $y = \cos{\left(\frac{3}{2}x - 1\right)}^2 + \frac{9}{4}x^2 - 3\,x, x_0 = \frac{2}{3}$.
2.24. $y = \frac{9}{4}x^2 - 2\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x-1}, x_0 = \frac{2}{3}$.
2.25. $y = \frac{9}{4}x^2 - 3x - 2\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x-2}, x_0 = \frac{4}{3}$.
2.26. $y = 6\mathrm{e}^{-2x} + 8x^3 - 12x^2 + 12x - 5, x_0 = 0$.

2.27. $y = 4x^2 + 4x - 2\mathrm{e}^{-2x-2}, x_0 = -1.$
2.28. $y = 4x^2 - 2\mathrm{e}^{-2x-1}, x_0 = -1/2.$
2.29. $y = -\sin(5x) - \operatorname{sh}(5x) + 10x, x_0 = 0.$
2.30. $y = \cos(5x+1)^2 + 25x^2 + 10x + 1, x_0 = -1/5.$

Задача 3. Найти асимптоты и построить графики функций.

3.1. $y = \frac{-3x^2+7}{7x+3}.$
3.2. $y = \frac{54x^3-27x^2-6x+1}{-27x^2+1}.$
3.3. $y = \frac{27x^3+9x^2-9x-1}{18x^2-2}.$
3.4. $y = \frac{27x^2-7}{6x+1}.$
3.5. $y = \frac{18x^2-1}{\sqrt{9x^2-2}}.$
3.6. $y = \frac{9x^2+18x+9}{3x+4}.$
3.7. $y = \frac{-9x^2-8}{\sqrt{9x^2-4}}.$
3.8. $y = \frac{9x^2+16}{\sqrt{81x^2-8}}.$
3.9. $y = \frac{-4x^2+21}{-14\,x+9}.$
3.10. $y = \frac{12x^2-7}{-4x+1}.$
3.11. $y = \frac{8x^2-1}{\sqrt{4x^2-2}}.$
3.12. $y = \frac{4x^2-12x+9}{-2\,x+4}.$
3.13. $y = \frac{-2x^2-4}{\sqrt{x^2-1}}.$
3.14. $y = \frac{2x^2+8}{\sqrt{9x^2-2}}.$
3.15. $y = \frac{-8x^3+4x^2+6x-1}{8x^2-2}.$
3.16. $y = \frac{-4x^2+21}{-14\,x+9}.$
3.17. $y = \frac{27x^2-7}{6x+1}.$
3.18. $y = \frac{18x^2-1}{\sqrt{9x^2-2}}.$
3.19. $y = \frac{-9x^2-8}{\sqrt{9x^2-4}}.$
3.20. $y = \frac{27x^3+9x^2-9x-1}{18x^2-2}.$
3.21. $y = \frac{x^3}{1+\frac{1}{16}x^4}.$
3.22. $y = -\frac{1}{27}\frac{(-3+x)^3}{2}.$
3.23. $y = \frac{x^2-20x}{5x+2}.$
3.24. $y = \frac{x^2-4x-4}{x+3}.$
3.25. $y = \frac{x^2-5x+6}{3x-1}.$
3.26. $y = \frac{-25\,x^2+21}{35\,x+9}.$
3.27. $y = \frac{75\,x^2-7}{10\,x+1}.$
3.28. $y = \frac{25\,x^2+16}{\sqrt{225\,x^2-8}}.$
3.29. $y = \frac{25\,x^2+30\,x+9}{5\,x+4}.$
3.30. $y = \frac{-25\,x^2-8}{\sqrt{25\,x^2-4}}.$

Задача 4. Провести полное исследование функции и построить её график.

4.1. $y = \frac{\mathrm{e}^{5x-3}}{5x-3}.$
4.2. $y = \ln\left(\frac{5x+6}{5x}\right).$
4.3. $y = 2\ln\left(\frac{5x-1}{5x}\right) + 1.$
4.4. $y = (10x+5)\,\mathrm{e}^{-10x-4}.$
4.5. $y = \sqrt[3]{(2-5x)(25x^2-20x+1)}.$
4.6.$y = \sqrt[3]{(5x+1)(25x^2+10x-2)}.$
4.7.$y = \sqrt[3]{(5x-3)(25x^2-30x+6)}.$

4.8.$y = 25^{1/3}\sqrt[3]{(3+5x)\,x^2}$.
4.9.$y = \sqrt[3]{(5x-2)^2} - \sqrt[3]{(5x-3)^2}$.
4.10. $y = \frac{\mathrm{e}^{-x-3}}{-x-3}$.
4.11. $y = \ln\left(-\frac{-x+6}{x}\right) - 1$.
4.12. $y = (-2x+5)\,\mathrm{e}^{2x-4}$.
4.13.$y = \sqrt[3]{(x+2)\,(x^2+4x+1)}$.
4.14.$y = \sqrt[3]{(3-x)\,x^2}$.
4.15. $y = 2\ln\left(-\frac{-x-1}{x}\right) + 1$.
4.16. $y = \frac{\mathrm{e}^{2x-3}}{2x-3}$.
4.17. $y = (4x+5)\,\mathrm{e}^{-4\ x-4}$.
4.18. $y = 2\ln\left(\frac{1}{2}\frac{2x-1}{x}\right) + 1$.
4.19. $y = \sqrt[3]{(2x+1)\,(4x^2+4x-2)}$.
4.20. $y = 4^{1/3}\sqrt[3]{(2x+3)\,x^2}$.
4.21. $y = \frac{e^{\frac{2}{3}x-3}}{\frac{2}{3}x-3}$.
4.22. $y = \ln\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\frac{2}{3}x+6}{x}\right) - 1$
4.23. $y = 2\ln\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\frac{2}{3}x-1}{x}\right) + 1$.
4.24. $y = \left(-x^2+4\right)e^{x^2-3}$.
4.25. $y = \left(-x^3+4\right)e^{x^3-3}$.
4.26. $y = \frac{\mathrm{e}^{7\,x-3}}{7\,x-3}$.
4.27. $y = 2\ln\left(\frac{7x-1}{7\ x}\right) + 1$.
4.28. $y = (14\,x+5)\,\mathrm{e}^{-14\,x-4}$.
4.29. $y = \sqrt[3]{49}\sqrt[3]{(7\,x+3)\,x^2}$.
4.30. $y = \sqrt[3]{(7\,x-2)^2} - \sqrt[3]{(7\,x-3)^2}$.

Задача 5. Провести полное исследование функций и построить их графики.

5.1. $y = \frac{1}{\sin(2x)-\cos(2x)}$.
5.2. $y = e^{\sin(2x)-\cos(2x)}$.
5.3. $y = \sqrt[3]{\sin(2x)}$.
5.4. $y = -\operatorname{arctg}(\cos(2x))$.
5.5. $y = \ln\left(\sqrt{2}\sin(2x)\right)$.
5.6. $y = \frac{1}{\sin(x+1)-\cos(x+1)}$.
5.7. $y = -\operatorname{arctg}(\cos(x+1))$.
5.8. $y = \sqrt[3]{\sin(x+1)}$.
5.9. $y = \ln\left(\sqrt{2}\sin(x+1)\right)$.
5.10. $y = e^{\sin(x+1)-\cos(x+1)}$.

5.11. $y = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right) - \cos\left(\frac{1}{2}x\right)}$.

5.12. $y = \sin^{1/3}\left(\frac{1}{2}x\right)$.

5.13. $y = e^{\sin\left(\frac{1}{2}x\right) - \cos\left(\frac{1}{2}x\right)}$.

5.14. $y = -\operatorname{arctg}\left(\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\right)$.

5.15. $y = \ln\left(\sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right)$.

5.16. $y = \frac{1}{\sin(3x) - \cos(3x)}$.

5.17. $y = e^{\sin(3x) - \cos(3x)}$.

5.18. $y = \sqrt[3]{\sin(3x)}$.

5.19. $y = -\operatorname{arctg}(\cos(3x))$.

5.20. $y = \ln\left(\sqrt{2}\sin(3x)\right)$.

5.21. $y = \operatorname{arctg}\left(\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)$.

5.22. $y = e^{\sin\left(\frac{3}{2}x\right) - \cos\left(\frac{3}{2}x\right)}$.

5.23. $y = \ln\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2}\cos x\right)$.

5.24. $y = -\operatorname{arctg}\left(\cos\left(\frac{3}{2}x\right)\right)$.

5.25. $y = \ln\left(\sqrt{2}\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)$.

5.26 $y = \operatorname{arctg}(\sin(5x))$.

5.27. $y = \mathrm{e}^{\sin(5x) - \cos(5x)}$.

5.28. $y = \operatorname{arctg}(\sin(7x))$.

5.29. $y = -\operatorname{arctg}(\cos(7x))$.

5.30. $y = \ln\left(\sqrt{2}\sin(7x)\right)$.

Теоретические упражнения

1. Доказать, что функция $f(x) = x - \sin x$ монотонно возрастает на отрезке: а) $\left[\ 0,\ \ 2\pi\ \right]$; б) $\left[\ 0,\ \ 4\pi\ \right]$ Следует ли из монотонности дифференцируемой функции монотонность ее производной?

2. Доказать теорему: *если функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *дифференцируемы на отрезке* $\left[\ a,\ \ b\ \right]$ *и* $\varphi'(x) > \psi'(x)$ $\forall x \in \left(\ a,\ \ b\ \right)$, *а* $\varphi(a) = \psi(a)$, *то* $\varphi(x) > \psi(x)$ $\forall x \in \left(\ a,\ \ b\ \right]$.

Дать геометрическую интерпретацию теоремы.

У к а з а н и е. При доказательстве теоремы установить и использовать монотонность функции $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$.

3. Доказать неравенство $2x/\pi < \sin x$ для трех случаев:

а) $\forall x \in \left(\ 0,\ \ \arccos\frac{2}{\pi}\ \right]$;

б) $\forall x \in \left[\ \arccos\frac{2}{\pi},\ \ \frac{\pi}{2}\ \right)$;

в) $\forall x \in \left(\ 0,\ \ \frac{\pi}{2}\ \right)$.

Дать геометрическую интерпретацию неравенства.

4. Исходя из определений минимума и максимума, доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

имеет в точке $x = 0$ минимум, а функция

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

не имеет в точке $x = 0$ экстремума.

5. Исследовать на экстремум в точке x_0 функцию $f(x) = (x - x_0)^n \varphi(x)$, считая, что производная $\varphi'(x)$ не существует, но функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 и $\varphi(x_0) \neq 0$, n.— натуральное число.

6. Исследовать знаки максимума и минимума функции $x^3 - 3x + q$ и выяснить условия, при которых уравнение $x^3 - 3x + q = 0$ имеет а) три различных действительных корня; б) один действительный корень.

7. Определить «отклонение от нуля» многочлена $p(x) = 6x^3 - 27x^2 + 36x - 14$ на отрезке $\left[\ 0,\ \ 3\ \right]$, т. е. найти на этом отрезке наибольшее значение функции $|p(x)|$.

8. Установить условия существования асимптот у графика рациональной функции.

§4. Интегрирование. Задачи

Задача 1. Вычислить интегралы.

1.1. $\int (15x-2)\,\mathrm{e}^{9x}\,\mathrm{d}x$.
1.2. $\int \ln\left(9x^2+4\right)\mathrm{d}x$.
1.3. $\int\ (2-12x)\sin(6x)\,\mathrm{d}x$.
1.4. $\int \ln\left(36x^2+1\right)\ \mathrm{d}x$.
1.5. $\int\ \frac{3x}{\cos^2(3x)}\mathrm{d}x$.
1.6. $\int \mathrm{arctg}\left(\sqrt{12x-1}\right)\ \mathrm{d}x$.
1.7. $\int\ (9x-2)\cos(15x)\,\mathrm{d}x$.
1.8. $\int 3x\sin^2(3x)\ \mathrm{d}x$.
1.9. $\int\ (5x+3)\,\mathrm{e}^{3x+3}\mathrm{d}x$.
1.10. $\int\ \ln\left(x^2+2x+5\right)\mathrm{d}x$
1.11. $\int (3x+1)\cos(5x+5)\ \mathrm{d}x$.
1.12. $\int \frac{x+1}{\cos^2(x+1)}\ \mathrm{d}x$.
1.13. $\int \mathrm{arctg}\left(\sqrt{4x+3}\right)\ \mathrm{d}x$.
1.14. $\int\ \ln\left(4x^2+8x+5\right)\mathrm{d}x$.
1.15. $\int\ (x+1)\left(\cos^2(x+1)-1\right)\mathrm{d}x$.
1.16. $\int (-25x-2)\,\mathrm{e}^{-15\ x}\ \mathrm{d}x$.
1.17. $\int \ln\left(25x^2+4\right)\mathrm{d}x$.
1.18. $\int (-15x-2)\cos(25x)\ \mathrm{d}x$.
1.19. $\int \frac{5x}{\cos^2(5x)}\mathrm{d}x$.
1.20. $\int \mathrm{arctg}\left(\sqrt{-20x-1}\right)\mathrm{d}x$.
1.21. $\int (3x-2)\,\mathrm{e}^{\frac{9}{5}x}\ \mathrm{d}x$
1.22. $\int\ \ln\left(\frac{9}{25}x^2+4\right)\mathrm{d}x$.
1.23. $\int \left(2-\frac{12}{5}x\right)\sin\left(\frac{6}{5}x\right)\ \mathrm{d}x$.
1.24. $\int \ln\left(\frac{36}{25}x^2+1\right)\ \mathrm{d}x$.
1.25. $\int \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{5}\sqrt{60x-25}\right)\ \mathrm{d}x$
1.26. $\int x\left(15x^2-2\right)\mathrm{e}^{9x^2}\mathrm{d}x$.
1.27. $\int x\ln\left(9x^4+4\right)\mathrm{d}x$.
1.28. $\int 3x^3\sin^2\left(3x^2\right)\mathrm{d}x$.
1.29. $\int x\left(9x^2-2\right)\cos\left(15x^2\right)\mathrm{d}x$.
1.30. $\int \frac{3x^3}{\cos^2(3x^2)}\mathrm{d}x$.

Ответы. **1.16.** $\frac{1}{45}\mathrm{e}^{-15x}(75x+11)+C$.
1.17. $x\ln\left(25x^2+4\right)-2x+\frac{4}{5}\arctan\left(\frac{5}{2}x\right)+C$.
1.18. $-\frac{3}{125}\cos(25x)-\frac{3}{5}\sin(25x)\,x-\frac{2}{25}\sin(25x)+C$.
1.19. $x\,\mathrm{tg}(5x)+\frac{1}{5}\ln(\cos(5x))+C$.
1.20. $\mathrm{arctg}\left(\sqrt{-20x-1}\right)x+\frac{1}{20}\sqrt{-20x-1}+C$.

Задача 2. Вычислить интегралы.

2.1. $\int\ \frac{1}{x\,\sqrt{9x^2+1}}\mathrm{d}x$.
2.2. $\int\ \frac{9x^2+\ln\left(9x^2\right)}{x}\mathrm{d}x$.
2.3. $\int \frac{\sin(3x)-\cos(3x)}{(\cos(3x)+\sin(3x))^5}\ \mathrm{d}x$.
2.4. $\int \mathrm{tg}(3x)\ln(\cos(3x))\ \mathrm{d}x$.
2.5. $\int \frac{\mathrm{tg}(3x+1)}{\cos^2(3x+1)}\ \mathrm{d}x$.
2.6. $\int \frac{x^3}{(9x^2+1)^2}\ \mathrm{d}x$.
2.7. $\int \frac{2\left(\frac{1}{4}x^2+\ln\left(\frac{1}{4}x^2\right)\right)}{x}\ \mathrm{d}x$
2.8. $\int \frac{x^3}{(25x^2+1)^2}\ \mathrm{d}x$.
2.9. $\int \frac{2\left(\arccos^3\left(\frac{1}{2}x\right)-1\right)}{\sqrt{-x^2+4}}\ \mathrm{d}x$.
2.10. $\int \frac{x-\frac{4}{x}}{\sqrt{x^2+4}}\ \mathrm{d}x$.
2.11. $\int \frac{x^3}{\left(\frac{1}{4}x^2+1\right)^2}\ \mathrm{d}x$.

2.12. $\int \frac{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)-\cos\left(\frac{1}{2}x\right)}{\left(\cos\left(\frac{1}{2}x\right)+\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right)^5}\,\mathrm{d}x.$

2.13. $\int \frac{4}{x\sqrt{x^2+4}}\,\mathrm{d}x.$

2.14. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-2x+2}(x-1)}.$

2.15. $\int \frac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{2x+2}}\,\mathrm{d}x.$

2.16. $\int \frac{25x^2+\ln\left(25x^2\right)}{x}\,\mathrm{d}x.$

2.17. $\int \frac{(\pi-\arccos(5x))^3-1}{\sqrt{-25x^2+1}}\,\mathrm{d}x.$

2.18. $\int \mathrm{tg}\,(5x)\left(\cos^2(5x)\right)\,\mathrm{d}x.$

2.19. $\int \frac{-\sin(5x)-\cos(5x)}{(\cos(5x)-\sin(5x))^5}\,\mathrm{d}x.$

2.20. $\int \frac{-5\,x+1}{\sqrt{25\,x+1}}dx.$

2.21. $\int \frac{25}{x\,\sqrt{4x^2+25}}\,\mathrm{d}x.$

2.22. $\int \frac{\frac{4}{25}x^2+\ln\left(\frac{4}{25}x^2\right)}{x}\,\mathrm{d}x.$

2.23. $\int \frac{\mathrm{tg}\left(\frac{2}{5}x+1\right)}{\cos^2\left(\frac{2}{5}x+1\right)}\,\mathrm{d}x.$

2.24. $\int \frac{x^3}{\left(\frac{4}{25}x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x.$

2.25. $\int \frac{\frac{2}{5}x-\frac{5}{2x}}{\sqrt{4x^2+25}}\mathrm{d}x.$

2.26. $\int \frac{4\left(\frac{1}{16}x^2+\ln\left(\frac{1}{16}x^2\right)\right)}{x}\mathrm{d}x.$

2.27. $\int \frac{4\left(\arccos^3\left(\frac{1}{4}x\right)-1\right)}{\sqrt{-x^2+16}}\mathrm{d}x.$

2.28 $\int \frac{\sin\left(\frac{1}{4}x\right)-\cos\left(\frac{1}{4}x\right)}{\left(\cos\left(\frac{1}{4}x\right)+\sin\left(\frac{1}{4}x\right)\right)^5}dx.$

2.29. $\int \frac{x^3}{\left(\frac{1}{16}x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x.$

2.30. $\int \frac{4\left(\frac{1}{4}x-\frac{4}{x}\right)}{\sqrt{x^2+16}}\mathrm{d}x.$

Ответы. **2.16.** $\frac{25}{2}x^2+2\ln(5)\ln(x)+\frac{1}{4}\ln^2\left(x^2\right)+C.$
2.17. $\frac{1}{20}(\pi-\arccos(5x))^4+\frac{1}{5}\arccos(5x)+C.$
2.18. $-\frac{1}{10}\cos^2(5x)+C.$
2.19. $-\frac{1}{20(\cos(5x)-\sin(5x))^4}+C.$
2.20. $-\frac{2}{375}\,(25\,x-17)\sqrt{25\,x+1}+C.$

Задача 3. Вычислить определённые интегралы.

3.1. $\int\limits_0^1 \frac{x}{16x^4+1}\,\mathrm{d}x.$

3.2. $\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{-2x-\frac{1}{2x}}{\sqrt{4x^2+1}}\,\mathrm{d}x$

3.3. $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\mathrm{arctg}(2x)+2\,x}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x.$

3.4. $\int\limits_{-1}^{-\frac{3}{2}} \frac{1-\sqrt{-2x}}{\sqrt{-2x}(-2x+1)}\mathrm{d}x.$

3.5. $\int\limits_0^1 \frac{8x^3}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x.$

3.6. $\int\limits_{-\mathrm{e}}^{-1} \frac{1+\ln(-2x)}{x}\,\mathrm{d}x.$

3.7. $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{tg}(2x-1)}{\cos^2(2x-1)}\,\mathrm{d}x.$

3.8. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{8\,x^3+2\,x}{16x^4+1}\,\mathrm{d}x.$

3.9. $\int\limits_0^4 \frac{x}{\frac{1}{256}x^4+1}\,\mathrm{d}x.$

3.10. $\int\limits_{4\sqrt{3}}^{8\sqrt{2}} \frac{x+\frac{16}{x}}{\sqrt{x^2+16}}\,\mathrm{d}x.$

3.11. $\int\limits_0^4 \frac{2\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}\left(\frac{1}{4}x+1\right)}\,\mathrm{d}x.$

3.12. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{4}x\right)+\frac{1}{4}x}{\frac{1}{16}x^2+1}\,\mathrm{d}x.$

3.13. $\int\limits_{1}^{\mathrm{e}} \frac{4\left(1+\ln\left(\frac{1}{4}x\right)\right)}{x}\,\mathrm{d}x.$

3.14. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}x+1\right)}{\cos^2\left(\frac{1}{4}x+1\right)}\,\mathrm{d}x.$

3.15. $\int\limits_{0}^{4} \frac{\frac{1}{64}x^3+\frac{1}{4}x}{\frac{1}{256}x^4+1}\,\mathrm{d}x.$

3.16. $\int\limits_{1}^{3} \frac{1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(4x+1)}\,\mathrm{d}x.$

3.17. $\int\limits_{-1}^{-2} \frac{4+4\ln\left(-\frac{5}{4}x\right)}{x}\,\mathrm{d}x.$

3.18. $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \frac{2-4\sqrt{-2x}}{\sqrt{-2x}(8x-1)}\,\mathrm{d}x.$

3.19. $\int\limits_{1}^{\mathrm{e}} \frac{1+\ln(7\ x)}{x}\mathrm{d}x.$

3.20. $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{5}} \frac{\operatorname{tg}(4x+1)}{\cos^2(4x+1)}\,\mathrm{d}x.$

3.21. $\int\limits_{0}^{3} \frac{x}{\frac{1}{81}x^4+1}\,\mathrm{d}x.$

3.22. $\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{8}}{3}} \frac{x+\frac{9}{x}}{\sqrt{x^2+9}}\,\mathrm{d}x$

3.23. $\int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}x\right)+\frac{1}{3}x}{\frac{1}{9}x^2+1}\,\mathrm{d}x.$

3.24. $\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{\left(1-\frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{x}\right)\sqrt{3}}{\sqrt{x}\left(\frac{1}{3}x+1\right)}\,\mathrm{d}x.$

3.25. $\int\limits_{1}^{\frac{\mathrm{e}}{3}} \frac{3+3\ln\left(\frac{1}{3}x\right)}{x}\,\mathrm{d}x$.

Вычислить значения выражений.

3.26. $\int\limits_{0}^{1} (5x-7)\,\mathrm{e}^{3x-3}\mathrm{d}x + \frac{11}{9}.$

3.27. $\int\limits_{2}^{3} \ln\left((x-1)^2+4\right)\mathrm{d}x - \pi + 4\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) + 2.$

3.28. $\int\limits_{0}^{1} (6-4x)\sin(2x-2)\,\mathrm{d}x + \sin(2) - 3\ \cos(2)\,.$

3.29. $\int\limits_{1}^{2} \frac{x-1}{\cos^2(x-1)}\,\mathrm{d}x - \ln(\cos(1))\,.$

3.30. $\int\limits_{3}^{4} \ln\left(4(x-1)^2+1\right)\mathrm{d}x + 2\ + \operatorname{arctg}(4) - \operatorname{arctg}(6)\,.$

Ответы. **3.16.** $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{13}\right) - \operatorname{arctg}(2) + \operatorname{arctg}\left(2\sqrt{3}\right)$.
3.17. $4\ln(5)\ln(2) - 6\ln^2(2) + 4\ln(2)$. **3.18.** 0.
3.19. $\ln(7) + \frac{3}{2}$. **3.20.** $-\frac{1}{8}\frac{\cos^2\left(\frac{9}{5}\right)-\cos^2\left(\frac{7}{3}\right)}{\cos^2\left(\frac{9}{5}\right)\cos^2\left(\frac{7}{3}\right)}$.

Задача 4. Вычислить неопределенные интегралы.

4.1. $\int \frac{3x^3+9x^2+9x+1}{x(x^2+3x+2)}\,\mathrm{d}x.$

4.2. $\int \frac{3x^5+15x^4+18x^3-6x^2-21x-16}{x^2+4x+3}\,\mathrm{d}x.$

4.3. $\int \frac{x^5+4x^4-14x^2-4x+13}{(x+1)(x-2)(x+3)}\,\mathrm{d}x.$

4.4. $\int \frac{x^3-3x^2+4x+2}{(x+3)(x-1)^3}\,\mathrm{d}x.$

4.5. $\int \frac{x^3+3x^2+4x+4}{(x+3)(x+1)^3}\,\mathrm{d}x.$

4.6. $\int \frac{2x^3+6x^2+7x+4}{(x+2)(x+1)^3}\,\mathrm{d}x.$

4.7. $\int \frac{x^3+7x^2+14x+10}{(x+2)^2(x^2+2x+2)}\,\mathrm{d}x.$

4.8. $\int \frac{3x^3+15x^2+26x+13}{(x+2)^2(x^2+2x+3)}\,\mathrm{d}x.$

4.9. $\int \frac{3x^3-9x^2+9x-5}{x(x^2-3x+2)}\,\mathrm{d}x.$

4.10. $\int \frac{x^5-6x^4+8x^3+2x^2+4x-3}{(x-4)(x^2-1)}\,\mathrm{d}x.$

4.11. $\int \frac{x^3-9x^2+28x-26}{(x+1)(x-3)^3}\,\mathrm{d}x.$

4.12. $\int \frac{x\left(x^2-3x+4\right)}{(x+1)(x-1)^3}\,\mathrm{d}x.$

4.13. $\int \frac{2x^3-6x^2+7x-2}{x(x-1)^3}\,\mathrm{d}x.$

4.14. $\int \frac{x^3+x^2-2x+2}{x^2(x^2-2x+2)}\,\mathrm{d}x.$

4.15. $\int \frac{3x^3-3x^2+2x-3}{x^2(x^2-2x+3)}\,\mathrm{d}x.$

4.16. $\int \frac{12x^3+1}{x(4x^2-1)}\,\mathrm{d}x.$

4.17. $\int \frac{4x^3+12x^2+13x+3}{(x-1)(x+1)^3}\,\mathrm{d}x.$

4.18. $\int \frac{\left(4x^3-8x^2+3x-1\right)}{(2x-1)^2(4x^2+1)}\,\mathrm{d}x.$

4.19. $\int \frac{96x^5-96x^3+7}{x(x-1)}\,\mathrm{d}x.$

4.20. $\int \frac{24x^3-24x^2+10x+1}{(2x-1)^2(2x^2+1)}\,\mathrm{d}x.$

4.21. $\int \frac{1}{4}\frac{24x^3+36x^2+18x+1}{x(2x^2+3x+1)}\,\mathrm{d}x.$

4.22. $\int \frac{32x^5+64x^4-56x^2-8x+13}{2(2x+1)(x-1)(2x+3)}\,\mathrm{d}x\,.$

4.23. $\int \frac{2\left(4x^3-6x^2+4x+1\right)}{(2x+3)(2x-1)^3}\,\mathrm{d}x.$

4.24. $\int \frac{8x^3+12x^2+7x+2}{(x+1)(2x+1)^3}\,\mathrm{d}x.$

4.25. $\int \frac{24x^3+60x^2+52x+13}{(x+1)^2(4x^2+4x+3)}\,\mathrm{d}x.$

4.26. $\int \frac{3x^3+27x^2+81x+79}{x^3+9x^2+26x+24}\,\mathrm{d}x.$

4.27. $\int \frac{x^3+3x^2+4x+6}{(x+5)(x+1)^3}\,\mathrm{d}x.$

4.28. $\int \frac{x^3+9x^2+28x+32}{(x+5)(x+3)^3}\,\mathrm{d}x.$

4.29. $\int \frac{x^3+13x^2+54x+74}{(x+4)^2(x^2+6x+10)}\,\mathrm{d}x.$

4.30. $\int \frac{2x^3+18x^2+55x+58}{(x+4)(x+3)^3}\,\mathrm{d}x.$

Ответы. **4.16.** $3x-\ln(x)+\frac{5}{4}\ln(2x-1)-\frac{1}{4}\ln(2x+1)+C.$
4.17. $4\ln(x-1)-\frac{1}{2(x+1)^2}+C.$
4.18. $\frac{1}{4(2x-1)}+\frac{1}{8}\ln\left(4x^2+1\right)-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}(2x)+C.$
4.19. $24x^4+32x^3+7\ln(x-1)-7\ln(x)+C.$
4.20. $-\frac{1}{2x-1}+\frac{3}{2}\ln\left(2x^2+1\right)-\frac{1}{2}\sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{2}\right)+C.$

Задача 5. Вычислить определённые интегралы.

5.1. $\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}(3)} \frac{1}{\sin^2(2x)(1-\cos(2x))}\,\mathrm{d}x.$

5.2. $\int\limits_{\operatorname{arctg}(2)}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{(1-\cos(2x))^3}\,\mathrm{d}x.$

5.3. $\int\limits_{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)}^{\operatorname{arctg}(2)} \frac{1}{\sin(2x)\cdot(1+\sin(2x))}\,\mathrm{d}x.$

5.4. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{5+4\cos(2x)}\ \mathrm{d}x.$

5.5. $\int\limits_{-\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}^{0} \frac{3\operatorname{tg}^2(2x)-50}{-2\operatorname{tg}(2x)+7}\ \mathrm{d}x.$

5.6. $\int\limits_{\pi/12}^{\pi/8} \frac{1}{(6+\operatorname{tg}(2x))\sin(4x)}\mathrm{d}x.$

5.7. $\int\limits_{0}^{\pi} \sin^2(2x)\cos^6(2x)\ \mathrm{d}x.$

5.8. $\int\limits_{0}^{\pi} \cos^8\left(\frac{1}{2}x\right)\ \mathrm{d}x.$

5.9. $\int\limits_{\frac{4\pi}{3}}^{2\pi} \frac{\cos\left(\frac{1}{2}x\right)}{\left(1-\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\right)^3}\ \mathrm{d}x.$

5.10. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\left(6-\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x\right)\right)\sin(x)}\ \mathrm{d}x.$

5.11. $\int\limits_{0}^{4\pi} \sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)\cos^6\left(\frac{1}{2}x\right)\ \mathrm{d}x.$

5.12. $\int\limits_{0}^{4\pi} \cos^8\left(\frac{1}{8}x\right)\mathrm{d}x.$

5.13. $\int\limits_{0}^{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\right)} \frac{\cos(3x)}{5+4\cos(3x)}\ \mathrm{d}x.$

5.14. $\int\limits_{0}^{6\pi} \sin^2(3x)\cos^6(3x)\ \mathrm{d}x.$

5.15. $\int\limits_{0}^{6\pi} \cos^8\left(\frac{3}{4}x\right)\ \mathrm{d}x.$

5.16. $\int\limits_{-\frac{\pi}{12}}^{-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(3)} \frac{1}{\sin^2(6x)(-1+\cos(6x))}\ dx.$

5.17. $\int\limits_{-\frac{1}{5}arc\operatorname{tg}(2)}^{-\frac{\pi}{20}} \frac{\cos(10x)}{(-1+\cos(10x))^3}\ \mathrm{d}x.$

5.18. $\int\limits_{0}^{-\frac{3\pi}{4}} \left(-\frac{\cos\left(\frac{2}{3}x\right)}{15+12\cos\left(\frac{2}{3}x\right)}\right)\ \mathrm{d}x.$

5.19. $\int\limits_{\frac{3}{12}\pi}^{\frac{3}{8}\pi} \frac{1}{\left(6+\operatorname{tg}\left(\frac{2}{3}x\right)\right)\sin\left(\frac{4}{3}x\right)}\ \mathrm{d}x.$

5.20. $\int\limits_{0}^{3\pi} \sin^2\left(\frac{2}{3}x\right)\cos^6\left(\frac{2}{3}x\right)\ \mathrm{d}x.$

5.21. $\int\limits_{\pi}^{4\operatorname{arctg}(2)} \frac{1}{2\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)\left(-1+\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\right)}\ \mathrm{d}x.$

5.22. $\int\limits_{-\frac{3}{2}\pi}^{-6\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)} \left(-\frac{1}{3}\frac{\cos\left(\frac{1}{3}x\right)}{\left(-1+\cos\left(\frac{1}{3}x\right)\right)^3}\right)\ \mathrm{d}x.$

5.23. $\int\limits_{-\pi}^{0} \frac{\cos\left(\frac{1}{2}x\right)}{10+8\cos\left(\frac{1}{2}x\right)}\ \mathrm{d}x.$

5.24. $\int\limits_{0}^{2\arccos\left(\frac{1}{10}\sqrt{10}\right)} \left(-\frac{3\operatorname{tg}^2\left(\frac{1}{2}x\right)-50}{4\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x\right)-14}\right)\ \mathrm{d}x.$

5.25. $\int\limits_{-2\pi+1}^{1} \sin^2(x-1)\cos^6(x-1)\ \mathrm{d}x.$

5.26. $\int\limits_{\frac{7\pi}{2}}^{14\operatorname{arctg}(2)} \left(-\frac{1}{7\sin^2\left(\frac{t}{7}\right)\left(-1+\cos\left(\frac{t}{7}\right)\right)}\right)\ \mathrm{d}t.$

5.27. $\int\limits_{\frac{\pi}{24}}^{\frac{1}{6}\operatorname{arctg}(3)} \left(-\frac{6}{\sin^2(12t)(-1+\cos(12t))}\right)\ \mathrm{d}t.$

5.28. $\int\limits_{-5\operatorname{arctg}(2)}^{-\frac{5}{4}\pi} \left(-\frac{1280}{49}\cdot\frac{\cos\left(\frac{2}{5}t\right)}{\left(-1+\cos\left(\frac{2}{5}t\right)\right)^3}\right)\ \mathrm{d}t.$

5.29. $\int\limits_{\frac{3\pi}{20}}^{\frac{3}{5}\operatorname{arctg}(2)} \left(-\frac{6400}{3}\frac{\cos\left(\frac{10}{3}t\right)}{\left(-1+\cos\left(\frac{10}{3}t\right)\right)^3}\right)\ \mathrm{d}t.$

5.30. $\int\limits_{-\frac{\pi}{8}}^{0} 1024\cos^8(4t)\ \mathrm{d}t.$

Ответы. **5.16.** $\frac{37}{243}$. **5.17.** $\frac{49}{6400}$. **5.18.** $-\frac{5}{12}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{16}\pi$. **5.19.** $-\frac{1}{16}\ln(3)+\frac{1}{8}\ln\left(18+\sqrt{3}\right)-\frac{1}{8}\ln(7)$. **5.20.** $\frac{15}{128}\pi$.

Задача 6. Вычислить интегралы.

6.1. $\int\limits_{1}^{\frac{5}{3}} \sqrt{\frac{2-3x}{3x-6}}\ \mathrm{d}x.$

6.2. $\int\limits_{3}^{5} \sqrt{\frac{2-x}{x-6}}\ \mathrm{d}x.$

6.3. $\int\limits_{3}^{5} \sqrt{\frac{2+\,x}{x+6}}\,\mathrm{d}x.$

6.4. $\int\limits_{0}^{\frac{4}{3}} x^2\sqrt{-9x^2+16}\,\mathrm{d}x.$

6.5. $\int\limits_{1}^{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{9x^2-4}}{x^4}\,\mathrm{d}x.$

6.6. $\int\limits_{1}^{2} \frac{\sqrt{1+3^{1/3}x^{1/3}\sqrt{3}}}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x.$

6.7. $\int\limits_{1}^{3} \frac{\left(1+27^{1/4}\left(x^3\right)^{1/4}\right)^{1/3}}{x^2}\,\mathrm{d}x.$

6.8. $\int\limits_{-5}^{-3} \sqrt{\frac{x+2}{-x-6}}\,\mathrm{d}x.$

6.9. $\int\limits_{-15}^{-9} \sqrt{\frac{x+6}{-x-18}}\,\mathrm{d}x.$

6.10. $\int\limits_{-2}^{0} \sqrt{-x^2+4}\,\mathrm{d}x.$

6.11. $\int\limits_{-4}^{0} x^2\sqrt{-x^2+16}\,\mathrm{d}x.$

6.12. $\int\limits_{-5}^{0} \frac{x^2}{\sqrt{-x^2+25}}\,\mathrm{d}x.$

6.13. $\int\limits_{3}^{4} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}\,\mathrm{d}x.$

6.14. $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{\sqrt{1+(-x)^{1/3}}}{x\sqrt{-x}}\,\mathrm{d}x.$

6.15. $\int\limits_{-\frac{5}{2}}^{0} \frac{x^2}{\sqrt{-4x^2+25}}\,\mathrm{d}x.$

6.16. $\int\limits_{-\frac{1}{3}}^{-\frac{5}{9}} \left(\sqrt{\frac{-2-9x}{9x+6}}\right)\,\mathrm{d}x.$

6.17. $\int\limits_{0}^{-4} \left(\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+4}\right)\,\mathrm{d}x.$

6.18. $\int\limits_{\frac{5}{3}}^{1} \left(\sqrt{\frac{-3x+2}{3x-6}}\right)\,\mathrm{d}x.$

6.19. $\int\limits_{-20}^{0} \frac{x^2}{\sqrt{-\frac{1}{16}x^2+25}}\,\mathrm{d}x.$

6.20. $\int\limits_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{\sqrt{4x^2-4}}{x^4}\,\mathrm{d}x.$

6.21. $\int\limits_{\frac{4}{3}}^{2} \sqrt{\frac{3-3x}{3x-7}}\,\mathrm{d}x.$

6.22. $\int\limits_{-\frac{2}{5}}^{\frac{4}{5}} \sqrt{\frac{-5-5x}{5x-7}}\,\mathrm{d}x$

6.23. $\int\limits_{1/4}^{16} \frac{2\ x-1}{\sqrt{x}+1}\mathrm{d}x.$

6.24. $\int\limits_{0}^{12} x^2\sqrt{-\frac{1}{9}x^2+16}\,\mathrm{d}x.$

6.25. $\int\limits_{0}^{\frac{25}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{-\frac{1}{25}x^2+25}}\,\mathrm{d}x.$

6.26. $\int\limits_{0}^{\frac{5}{8}} \frac{64}{25}\frac{t^2}{\sqrt{-16t^2+25}}\,\mathrm{d}t.$

6.27. $\int\limits_{1}^{\frac{1}{3}\sqrt{15}} 2t\cdot\sqrt{\frac{-3t^2+2}{3t^2-6}}\,\mathrm{d}t.$

6.28. $\int\limits_{3}^{\frac{10}{3}} \sqrt{\frac{17-6t}{6t-21}}\,\mathrm{d}t.$

6.29. $\int\limits_{0}^{\frac{4}{3}} \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{9}{4}t^2+4}\,\mathrm{d}t.$

6.30. $\int\limits_{3}^{\frac{29}{9}} \sqrt{\frac{26-9t}{9t-30}}\,\mathrm{d}t.$

Ответы. **6.16.** $-\frac{2}{27}\pi$. **6.17.** -2π. **6.18.** $-\frac{2}{9}\pi$. **6.19.** 400π. **6.20.** $-\frac{10}{81}\sqrt{5}+\frac{1}{4}\sqrt{3}$.

Задача 7. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций, заданными в декартовых координатах.

7.1. $y=-9x^2+4, y=9x^2-6\,x$.

7.2. $y=9x\sqrt{-x^2+1}, y=0, 0\le x\ \le 1$.

7.3. $y=\cos^2(3x)\,, y=0, 0\le x\ \ \le \frac{1}{6}\pi$.

7.4. $y=\frac{1}{x\sqrt{1+\ln(3x)}}, y=0, x=\frac{1}{3}, x=\frac{\mathrm{e}}{3}$.

7.5. $y=-9x^2+6x+3, y=9x^2-12x+3$.

7.6. $y=\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{3x}}}{x^2}, y=0, 3x=2, 3x=1$.

7.7. $y=(3x-2)^3\,, y=12x-8$.

7.8. $y=-25x^2+4, y=25x^2-10x$.

7.9. $y=x\sqrt{-25x^2+9}, y=0, 0\le x\ \ \le\frac{3}{5}$.

7.10. $y=\frac{1}{x\sqrt{1+\ln(5x)}}, y=0, x=\frac{1}{5}, x=\frac{\mathrm{e}}{5}$.

7.11. $y=-25x^2+10x+3, y=25x^2-20x+3$.

7.12. $y=\frac{x}{1+\sqrt{5x}}, y=0, 5x=1$.

7.13. $y=\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{5x}}}{x^2}, y=0, 5x=2, 5x=1$.

7.14. $y=(5x-2)^3\,, y=20x-8$.

7.15. $y=-x^2+4, y=x^2-2x$.

7.16. $y=2-x^2, y=\ \sqrt[3]{x^2}$.

7.17. $y=2\,x-x^2, y=-x$.

7.18. $y=(6\,x-2)^3, y=24\,x-8$.

7.19. $y=\frac{1}{1+x^2}, y=\frac{x^2}{2}$.

7.20. $y=x^2\sqrt{16\ -9\,x^2}, y=0, x=\frac{4}{3}$.

7.21. $y=\frac{2}{3}\,\sqrt{-x^2+1}, y=0, x=0, -2\,x=1$.

7.22. $y=-\frac{1}{6x\ \sqrt{1+\ln(-2x)}}, y=0, -2x=1, -2x=e^3$.

7.23. $y=\frac{1}{3}\sqrt{e^{-2x}-1}, y=0, -2x=\ln(2)\,$.

7.24. $y=-\frac{2}{3}x\sqrt{-4x^2+9}, y=0, 0\le -2x\le 3$.

7.25. $3y=-4x^2-4x+3, 3y=4x^2+8x+3$,

Вычислить площади областей, ограниченных замкнутыми кривыми, заданными параметрически или в полярной форме.

7.26.$x=t^2-1, y=t^3-t$.

7.27.$x=t^2+2t, y=t^3+3t^2+2t$.

7.28.$x=t^2-4t+3, y=t^3-6t^2+11t-6$.

7.29. $\rho = 3\sqrt{2}\cos(\varphi)$, $\rho = 3\sin(\varphi)$.
7.30. $\rho = 12\sqrt{2}\cos(\varphi)$, $\rho = 12\sin(\varphi)$.

Ответы. **7.16.** $\frac{32}{15}$. **7.17.** $\frac{9}{2}$. **7.18.** $\frac{4}{3}$. **7.19.** $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$. **7.20.** $\frac{16\pi}{27}$.

Задача 8. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в прямоугольной системе координат.

8.1. $y = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}\ln(3x)$, $\frac{1}{3} \le x \le \frac{2}{3}$.
8.2. $y = \frac{1}{3}\left(\sqrt{-9x^2+3x} - \arccos\left(\sqrt{3x}\right)\right) + 5$, $\frac{1}{27} \le x \le \frac{1}{3}$.
8.3. $y = \frac{1}{3}\ln\left(9x^2-1\right)$, $\frac{2}{3} \le x \le 1$.
8.4. $y = \frac{1}{3}\operatorname{ch}(3x) + 3$, $0 \le x \le \frac{1}{3}$.
8.5. $y = \frac{1}{3}e^{3x} + 13$, $\frac{\ln(15)}{6} \le x \le \frac{\ln\left(2\sqrt{6}\right)}{3}$.
8.6. $y = \frac{1}{8}x^2 - \ln\left(\frac{1}{2}x\right)$, $2 \le x \le 4$.
8.7. $y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{-4x^2+2x} - \left(\arccos\left(\sqrt{2x}\right)\right)\right) + 7$, $0 \le x \le \frac{1}{2}$.
8.8. $y = 2\ln\left(\frac{1}{4}x^2 - 1\right)$, $4 \le x \le 6$.
8.9. $y = 2\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}x\right) + 9$, $0 \le x \le 2$.
8.10. $y = 2e^{\frac{1}{2}x} + 17$, $0 \le x \le \ln 2$.
8.11. $y = 5 + \left(\arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2x}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{-x^2+2x}\right)$, $0 \le x \le 1$.
8.12. $y = \frac{1}{4}(x+1)^2 - \frac{1}{2}\ln(x+1)$, $0 \le x \le 1$.
8.13. $y = \ln\left(x^2+2x\right)$, $1 \le x \le 2$.
8.14. $y = \operatorname{ch}(x+1) + 3$, $-1 \le x \le 0$.
8.15. $y = 2 + \arcsin\left(\sqrt{x+1}\right) + \sqrt{x+1-(x+1)^2}$, $-\frac{3}{4} \le x \le 0$.
8.16. $y = \frac{1}{2}x\sqrt{9x^2-1} - \frac{1}{6}\ln\left(3x + \sqrt{9x^2-1}\right) + 4$, $0 \le x \le \frac{1}{4}$.
8.17. $y = -\frac{1}{2}\sqrt{e^{4x}-1} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{e^{4x}-1}}\right)$, $1 \le x \le 2$.
8.18. $y = \sqrt{x}\sqrt{1-x} + \frac{1}{2}\arcsin(2x-1)$, $0 \le x \le \frac{1}{3}$.
8.19. $y = \frac{2}{3}(2\sqrt{x}+1)^{3/2}$, $1 \le x \le 2$.
8.20. $y = \frac{1}{3}\sqrt{\left(e^{3x}\right)^2 - 1} + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(e^{3x}\right)^2-1}}\right)$, $1 \le x \le 2$.
8.21. $y = \frac{1}{5}\sqrt{\left(e^{-5x}\right)^2 - 1} - \frac{1}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(e^{-5x}\right)^2-1}}\right)$, $-1 \le x \le 2$.
8.22. $y = \frac{1}{6}x\sqrt{4x^2-9} - \frac{3}{4}\ln\left(x\sqrt{4} + \sqrt{4x^2-9}\right)$, $0 \le x \le 1$
8.23. $y = \frac{3}{2}\sqrt{e^{\frac{4}{3}x}-1} + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{e^{\frac{4}{3}x}-1}}\right) + 5$, $1 \le x \le 2$.

8.24. $y=\frac{1}{2}(2x+3)\sqrt{x^2+3x+2}-\frac{1}{4}\ln\left(\frac{3}{2}+x+\sqrt{x^2+3x+2}\right)+$ $+8,-1\le x\le 2.$

8.25. $y=2\sqrt{2x-1}+\ln\left(\sqrt{2x-1}-1\right)-\ln\left(\sqrt{2x-1}+1\right),2\le x\le$ $\le 4.$

8.26. $y=\frac{1}{2}x\sqrt{9x^2-1}-\frac{1}{6}\ln\left(x\sqrt{9}+\sqrt{9x^2-1}\right),1\le x\le 2.$

8.27. $y=\frac{1}{2}x\sqrt{16x^2-1}-\frac{1}{8}\ln\left(4x+\sqrt{16x^2-1}\right),-1\le x\le 2.$

8.28. $y=\frac{1}{3}\left(x^2+2\right)^{3/2}+\cos(35),2\le x\le 3.$

8.29. $y=\frac{\left(x^2-2\right)\sqrt{x^2-2}}{3},0\le x\le 4.$

8.30. $y=2\sqrt{e^{x+3}-1}-2\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{e^{x+3}-1}\right),0\le x\le 3.$

Ответы. **8.16.** $\frac{3}{32}$. **8.17.** $-\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}e^4$. 8.18. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$. **8.19.** $-1+2\sqrt{2}$. **8.20.** $-\frac{1}{3}e^3+\frac{1}{3}e^6$.

Задача 9. Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями.

9.1. $z=x^2+36y^2, z=2.$

9.2. $\frac{1}{9}x^2+\frac{9}{4}y^2-z^2=1, z=0, z=3.$

9.3. $z=x^2+81y^2, z=3.$

9.4. $\frac{1}{9}x^2+\frac{9}{16}y^2-\frac{1}{64}z^2=-1, z=16.$

9.5. $\frac{1}{9}x^2+\frac{9}{4}y^2-z^2=1, z=0, z=3$.

9.6. $z=4x^2+36y^2, z=2$.

9.7. $z=9x^2+4y^2, z=2.$

9.8. $x^2+\frac{1}{4}y^2-z^2=1, z=0, z=3.$

9.9. $z=9x^2+9y^2, z=3.$

9.10. $x^2+\frac{1}{16}y^2-\frac{1}{64}z^2=-1, z=16.$

9.11. $x^2+\frac{1}{4}y^2-z^2=1, z=0, z=3.$

9.12. $z=36x^2+4y^2, z=2.$

9.13. $z=9x^2+16y^2, z=2.$

9.14. $x^2+y^2-z^2=1, z=0, z=3.$

9.15. $x^2+\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{64}z^2=-1, z=16.$

9.16. $z=2, z=9x^2+4y^2.$

9.17. $z=16, \frac{1}{4}x^2+\frac{1}{16}y^2-\frac{1}{64}z^2=-1.$

9.18. $z=1,2\ z=36x^2+100y^2.$

9.19. $z=8, x^2+\frac{9}{16}y^2-\frac{1}{16}z^2=-1.$

9.20. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ \ (a,b,c>0)\,.$

Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур вокруг оси Ox, ограниченных графиками функций.

9.21. $y=-7x^2+5x,\ x=0, x=\frac{5}{7}.$

9.22. $-49x^2+14x-y=0,\ \ 98x^2-28\ x+y=0.$

9.23. $y=x\ e^{7x}, y=0, x=\frac{1}{7}.$

9.24. $y=-x^2+7x, x=0, x=7.$

9.25. $y=(x-1)\,e^{x-1}, y=0, x=2.$

9.26. $y=-x^2+5\ x,\ x=0, x=5.$

9.27. $y=-x^2+6x, x=0, x=6.$

9.28. $y=-\mathrm{e}^{2x}+5\mathrm{e}^{x}, x=\ln 2, x=\ln 3.$

9.29. $y=-(2x-1)^2+1, x=0, x=1.$

9.30. $y=-9x^2+9x, x=0, x=1.$

Ответы. **9.16.** $\frac{\pi}{3}$; **9.17.** $\frac{128\pi}{3}$. **9.18.** $\frac{\pi}{60}$. **9.19.** $\frac{32\pi}{9}$. **9.20.** $\frac{4}{3}\pi abc.$

Теоретические упражнения

1. Считая, что функция $\frac{\sin x}{x}$ равна 1 при $x=0$, доказать, что она интегрируема на отрезке $\left[\ 0,\ \ 1\ \right]$.

2. Какой из. интегралов больше:
$\int_0^1\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx$ или $\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx\,?$

3. Пусть $f\,(t)$ – непрерывная функция, а функции $\varphi\,(x)$ и $\psi\,(x)$ дифференцируемые. Доказать, что
$\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f\,(t)\,dt=f\,[\psi\,(x)]\,\psi'\,(x)-f\,[\varphi\,(x)]\,\varphi'\,(x)\,.$

4. Найти $\frac{d}{dx}\int_{\sqrt{x}}^{x^2}e^{t^2}dt.$

5. Найти точки экстремума функции
$f\,(x)=\int_0^x(t-1)\,(t-2)\,e^{-t^2}dt.$

6. Пусть $f\,(x)$ – непрерывная периодическая функция с периодом T. Доказать, что
$\int_a^{a+T}f\,(x)\,dx=\int_0^Tf\,(x)\,dx\quad\forall a.$

7. Доказать, что если $f\,(x)$ – четная функция, то
$\int_{-a}^0f\,(x)\,dx=\int_0^{+a}f\,(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-a}^{+a}f\,(x)\,dx.$

8. Доказать, что для нечетной функции $f\,(x)$ справедливы равенства
$\int_{-a}^0f\,(x)\,dx=-\int_0^{+a}f\,(x)\,dx$ и $\int_{-a}^af\,(x)\,dx=0.$
Чему равен интеграл $\int_{-1}^{+1}\sin^2x\ln\frac{2+x}{2-x}dx?$

9. При каком условии, связывающем коэффициенты a, b, c интеграл $\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}dx$ является рациональной функцией?

10. При каких целых значениях n интеграл $\int \sqrt{1+x^4}dx$ выражается элементарными функциями.