1 семестр. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Лекция 8. Пространство геометрических векторов. Линейные операции над векторами. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов, их вычисление в координатной форме и геометрический смысл

В этой лекции вводятся векторы, линейные операции над ними, определяются скалярное, векторное и смешанное произведение векторов и поясняется их геометрический смысл.

8.1. Векторы. Координаты векторов и линейные операции над векторами

Множество всех геометрических векторов в трехмерном пространстве обозначают буквой R^3, а множество всех векторов на плоскости – буквой R^2. Ниже все понятия и утверждения формулируются для пространства R^3. Ясно, что они очевидным образом переносятся и на пространство векторов в плоскости R^2. Перейдем к изложению основных понятий.

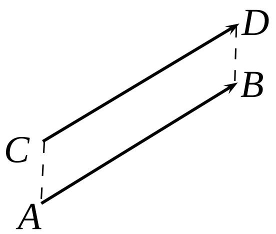

Рис. 8.1

Определение 8.1. *Вектором называется направленный отрезок* $\overrightarrow{AB}$ *с начальной точкой* A *и конечной точкой* B, *причем два вектора считаются равными, если один из них получен из другого параллельным переносом(рис. 8.1). Длина* $|AB|$ *направленного отрезка* $\overrightarrow{AB}$ *называется длиной вектора* $\overrightarrow{AB}$. *Векторы* $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, *лежащие на одной прямой или на параллельных прямых называются коллинеарными; если при этом их направления совпадают, то пишут* $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$, *а если они имеют противоположные направления, то пишут* $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow$. *Таким образом,* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow$ *а)* $|AB| = |CD|$, *)* $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$. *Если начало и конец вектора совпадают, то такой вектор называется нулевым (обозначение:* $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ *).*

Считают, что нулевой вектор коллинеарен любому другому вектору и имеет произвольное направление.

Заметим, что векторы обозначаются также малыми латинскими буквами: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$.

Напомним, что осью (в пространстве или на плоскости) называется прямая с выбранной на ней началом O, (положительным) направлением и масштабом (единицей измерения). Обозначение: $\overrightarrow{Ol}$. При этом каждой точке M оси соответствует единственное действительное число x, равное расстоянию $|OM|$, если $\overrightarrow{OM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{Ol}$, и равно $-|OM|$, если $\overrightarrow{OM} \uparrow\downarrow \overrightarrow{Ol}$. И обратно: каждому действительному числу x соответствует единственная точка M на числовой оси такая, что $|OM| = |x|$ и $\overrightarrow{OM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{Ol}$, если $x > 0$, и $\overrightarrow{OM} \uparrow\downarrow \overrightarrow{Ol}$, если $x < 0$ (числу $x = 0$ соответствует начало O оси). Единичный вектор $\vec{l}^0$ $\left(|\vec{l}^0| = 1\right)$, лежащий на оси $\overrightarrow{Ol}$ и направленный так же, как ось, называется *ортом оси* $\overrightarrow{Ol}$.

Пусть M – произвольная точка в пространстве R^3 (или на плоскости R^2). Проведем через M плоскость $\alpha \perp \overrightarrow{Ol}$. Тогда точка $M' = \alpha \cap \overrightarrow{Ol}$ называется *проекцией точки* M *на ось* $\overrightarrow{Ol}$ (обозначение: $M' = \Pr_{Ol} M$).

Определение 8.2. Если $\overrightarrow{AB}$ – вектор, то вектор $\overrightarrow{A'B'}$, где $A' = \Pr_{Ol} A$, $B' = \Pr_{Ol} B$, называется *геометрической проекцией* вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось $\overrightarrow{Ol}$ (рис. 8.2), а число

$$m = \begin{cases} |\Pr_{Ol} \overrightarrow{AB}|, \text{если } \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{Ol}, \\ -|\Pr_{Ol} \overrightarrow{AB}|, \text{если } \overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{Ol} \end{cases}$$

называется просто *проекцией* вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось $\overrightarrow{Ol}$ и обозначается $pr_{Ol}\overrightarrow{AB}$ (обратите внимание на различие в написаниях $\Pr_{Ol} \overrightarrow{AB}$ и $pr_{Ol}\overrightarrow{AB}$).

В пространстве R^3 рассмотрим декартовую систему координат, определяемую осями $\overrightarrow{Ox}$, $\overrightarrow{Oy}$, $\overrightarrow{Oz}$, с ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ соответственно.

Определение 8.3. Числа $x = pr_{Ox}\overrightarrow{AB}$, $y = pr_{Oy}\overrightarrow{AB}$, $z = pr_{Oz}\overrightarrow{AB}$ называются *координатами вектора* $\overrightarrow{AB}$ в декартовой системе координат. Обозначение: $\overrightarrow{AB} = \{x, y, z\}$.

1^0) *Если* $A\,(a_1, b_1, c_1)$ *— начало вектора* $\overrightarrow{AB}$, *а* $B\,(a_2, b_2, c_2)$ *— конец вектора* $\overrightarrow{AB}$, *то* $\overrightarrow{AB} = B - A = \{a_2 - a_1, b_2 - b_1, c_2 - c_1\}$.

2^0) *Орты осей декартовой системы координат* $Oxyz$ *имеют следующие координаты:* $\vec{i} = \{1, 0, 0\}$, $\vec{j} = \{0, 1, 0\}$, $\vec{k} = \{0, 0, 1\}$.

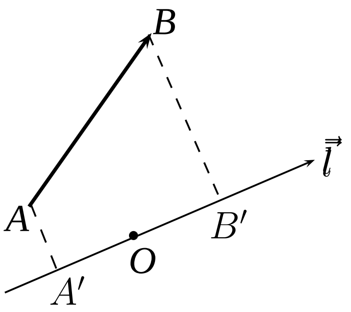

Рис. 8.2

Определим теперь линейные операции над геометрическими векторами. Выпустим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ из общего начала M и построим параллелограмм со сторонами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Пусть $\overrightarrow{MN}$ – диагональ этого параллелограмма.

1. *Суммой двух векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \overrightarrow{MN}$, совпадающий с диагональю параллелограмма $\overrightarrow{MN}$, построенного указанным образом на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 8.3).

2. *Разностью векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{x}$, что $\vec{b} + \vec{x} = \vec{a}$. Обозначение: $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют общее начало, то вектор $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$ будет совпадать с вектором, выпущенным из конца вектора $\vec{b}$ в конец вектора $\vec{a}$ (рис. 8.3).

3. *Произведением вектора* $\vec{a}$ *на число* λ *называется вектор* $\vec{d}$, имеющий длину $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$ и направленный так же, как и $\vec{a}$, *если* $\lambda > 0$, *и противоположно вектору* $\vec{a}$, *если* $\lambda < 0$. Обозначение: $\vec{d} = \lambda\vec{a}$. Если же $\lambda = 0$, то $\lambda\vec{a} = \vec{0}$.

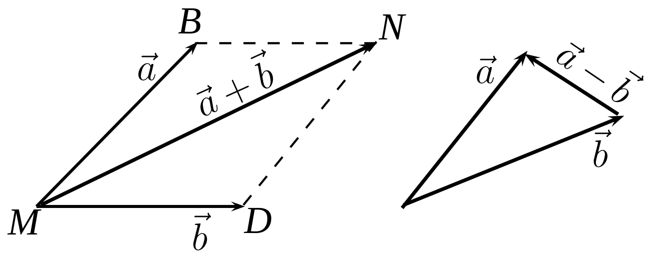

Рис. 8.3

Введенные операции над векторами (их называют линейными операциями) обладают свойствами аналогичных операций для чисел (свойства ассоциативности, коммутативности, дистрибутивности и т.д.), которые используются при вычислениях. Например,

$$5(3\vec{a} - 7\vec{b}) + 4\left(2\vec{a} + 9\vec{b}\right) = 15\vec{a} - 21\vec{b} + 8\vec{a} + 36\vec{b} = 23\vec{a} + 15\vec{b}.$$

Из определения коллинеарных векторов вытекает, что

3^0) *векторы* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда существует число* λ *такое, что* $\vec{a} = \lambda\vec{b}$.

Теперь ясно, что по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно построить любую их линейную комбинацию $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ $(\lambda, \mu -$ числа$)$. Используя геометрические соображения, легко доказать следующее утверждение.

Теорема 8.1. *Любой вектор* $\vec{a} \in R^3$ *может быть разложен в линейную комбинацию ортов* $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, *причем это разложение единственно, а числа* x, y, z *являются координатами вектора* $\vec{a}$ *в выбранной декартовой системе координат* $Oxyz$.

Замечание 8.1. Ниже будет дано определение базиса в пространстве R^3 и будет показано что орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ образуют базис в R^3. Кроме того, будет показано, что в R^3 существует бесконечное множество базисов. Базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ обычно называют *стандартным базисом* в пространстве R^3.

Теорема 8.1 устанавливает взаимно однозначное соответствие между векторами пространства R^3 и упорядочными тройками чисел $(x, y, z) \in \mathbb{R}_3$. Именно: каждому вектору $\vec{a} \in R^3$ соответствует единственная упорядочная тройка чисел $(x, y, z) \in \mathbb{R}_3$, где x, y, z – координаты вектора $\vec{a} \in R^3$ в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, и наоборот: каждой упорядочной тройке чисел $(x, y, z) \in \mathbb{R}_3$ соответствует единственный вектор $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \in R^3$. Поэтому часто отождествляют векторы и их координаты и пишут $a = \{x, y, z\}$. При этом вместо того, чтобы совершать геометрически линейные операции над векторами совершают их аналитически, в координатной форме. Это оправдывается следующим утверждением.

Теорема 8.2. Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами: $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$. Тогда их линейная комбинация $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ $(\lambda, \mu -$ числа$)$ в координатной форме имеет вид

$$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b} \equiv \lambda\{a_1, a_2, a_3\}+\mu\{b_1, b_2, b_3\} = \{\lambda a_1 + \mu b_1, \lambda a_2 + \mu b_2, \lambda a_3 + \mu b_3\}.$$

Доказательство. Имеем

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}, \quad \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k},$$

поэтому

$$\begin{aligned}&\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\lambda(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})+\mu(\,b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k})=\\&=(\lambda a_1+\mu b_1)\,\vec{i}+(\lambda a_2+\mu b_2)\,\vec{j}+(\lambda a_3+\mu b_3)\,\vec{k}=\\&=\{\lambda a_1+\mu b_1,\lambda a_2+\mu b_2,\lambda a_3+\mu b_3\}\,.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Используя теорему о диагонали прямоугольного параллелепипеда, легко доказать следующее утверждение.

Теорема 8.3. *Если вектор* $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$ *задан своими координатами в базисе* $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, *то его длина вычисляется по формуле* $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$.

Определение 8.4. Углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется угол, на который нужно повернуть первый вектор $\vec{a}$ до совпадения со вторым вектором $\vec{b}$ *против хода часовой стрелки.* Обозначение: $\varphi=\left(\vec{a},^\wedge\vec{b}\right)$.

Проекция вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ определяется так же, как и проекция вектора на ось.

4^0) *Проекция вектора* $\vec{a}$ *на вектор* $\vec{b}$ *вычисляется по формуле*

$$pr_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\cos\left(\vec{a},^\wedge\vec{b}\right).$$

Числа $\cos\left(\vec{a},^\wedge\vec{i}\right)=\alpha$, $\cos\left(\vec{a},^\wedge\vec{j}\right)=\beta$, $\cos\left(\vec{a},^\wedge\vec{k}\right)=\gamma$ называются *направляющими косинусами* вектора $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$. Так как $a_1=|a|\cdot\alpha, a_2=|a|\cdot\beta, a_3=|a|\cdot\gamma$ и $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$, то $|a|=|a|\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$, поэтому имеет место следующее соотношение между направляющими косинусами вектора $\vec{a}$: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$. Значит, вектор $\vec{a}^0=\{\alpha,\beta,\gamma\}=\left\{\frac{a_1}{|a|},\frac{a_2}{|a|},\frac{a_3}{|a|}\right\}=\frac{\vec{a}}{|a|}$ является ортом вектора $\vec{a}$.

Из 3^0 вытекает следующее утверждение.

5^0) *Векторы* $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$, $\vec{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны:*

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}.$$

8.2. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов

Дадим определения этих произведений в краткой форме:

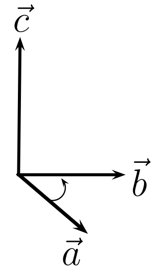

Рис. 8.4

а) скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} \equiv \left(\vec{a},\vec{b}\right) \stackrel{def}{=} |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\left(\vec{a},^\wedge\vec{b}\right) \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=$$

$$= |\vec{a}|pr_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|pr_{\vec{b}}\vec{a};$$

б) векторное произведение неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{a}\times\vec{b} \equiv \left[\vec{a},\vec{b}\right]$ *– есть вектор* $\vec{c}$, *удовлетворяющий требованиям*(рис. 8.4):

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\left(\vec{a},^\wedge\vec{b}\right)$;

2) $\vec{c}\perp\vec{a},\ \ \vec{c}\perp\vec{b}$;

3) *тройка* $\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\}$ *– правая, т.е. кратчайший поворот от вектора* $\vec{a}$ *к вектору* $\vec{b}$, *имеющих общее начало, виден из конца вектора* $\vec{c}$ *(с тем же началом) совершающимся против хода часовой стрелки.*

Если же векторы $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *коллинеарны, то по определению полагают* $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$;

в) смешанное произведение векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$:

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) \stackrel{def}{=} \left(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\right) = \left(\vec{a},\vec{b}\times\vec{c}\right).$$

Введенные операции умножения над векторами обладают свойствами ассоциативности и дистрибутивности. Свойство коммутативности верно лишь для скалярного произведения. *При перемене мест сомножителей в векторном произведении изменяется знак (антикоммутативность):*

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}.$$

То же может произойти и в смешанном произведении. Например, $\left(\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right) \equiv \left(\vec{b}\times\vec{a},\vec{c}\right) = \left(-\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\right) = -\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$. Учитывая свойство антикоммутативности векторного произведения, можно обращаться с введенными произведениями векторов как с обычным произведением чисел. Например,

$$\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)\times\left(2\vec{a}+5\vec{b}\right)=6\vec{a}\times\vec{a}+15\vec{a}\times\vec{b}-4\vec{b}\times\vec{a}-10\vec{b}\times\vec{b}=$$

$$=0+15\vec{a}\times\vec{b}+4\vec{a}\times\vec{b}+0=19\vec{a}\times\vec{b}.$$

Здесь учтено, что векторное произведение коллинеарных векторов равно нулю (здесь и далее вместо $\vec{0}$ пишем просто 0).

Имеют место следующие утверждения, вытекающие из определений а), б) и с).

6^0) *Скалярное произведение $\vec{a}{\cdot}\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно нулю тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны друг другу.*

7^0) *Векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$ равно нулю тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.*

8^0) *Смешанное произведение $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ равно нулю тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны (т.е. все они либо лежат в одной плоскости, либо находятся в параллельных плоскостях).*

9^0) $\cos\left(\vec{a},^\wedge \overleftarrow{b}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\overleftarrow{b}}{|\vec{a}|\cdot|\overleftarrow{b}|}$; $\vec{a}\cdot\vec{a}\equiv\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$.

Геометрический смысл: *а) модуль $|\vec{a}\times\vec{b}|$ векторного произведения численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$; б) модуль $|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)|$ смешанного произведения равен объёму параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.*

Прежде чем дать формулы для вычисления произведений векторов в координатной форме, введем понятие определителей второго и третьего порядков:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-cb;$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\cdot\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}-a_2\cdot\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}+a_3\cdot\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\equiv$$

$$\equiv a_1\left(b_2c_3-c_2b_3\right)-a_2\left(b_1c_3-c_1b_3\right)+a_3\left(b_1c_2-c_1b_2\right).$$

Теорема 8.4. *Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то имеют место формулы:*

а) $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ *(скалярное произведение;)*

б) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \equiv$

$\equiv \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\}$ *(векторное произведение);*

в) $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$

(смешанное произведение).

Доказательство проведем лишь для скалярного произведения. Имеем

$$\begin{aligned} &\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k},\ \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \left\{ a_1b_1(\vec{i}, \vec{i}) + a_1b_2 \left(\vec{i}, \vec{j}\right) + a_1b_3 \left(\vec{i}, \vec{k}\right) \right\} + \\ &+ \left\{ a_2b_1 \left(\vec{j}, \vec{i}\right) + a_2b_2 \left(\vec{j}, \vec{j}\right) + a_2b_3 \left(\vec{j}, \vec{k}\right) \right\} + \\ &+ \left\{ a_3b_1 \left(\vec{k}, \vec{i}\right) + a_3b_2 \left(\vec{k}, \vec{j}\right) + a_3b_3 \left(\vec{k}, \vec{k}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Учитывая, что векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, попарно ортогональны, получаем, что в этой сумме только слагаемые с множителями $\left(\vec{i}, \vec{i}\right) = |\vec{i}|^2 = 1$, $\left(\vec{j}, \vec{j}\right) = |\vec{j}|^2 = 1$, $\left(\vec{k}, \vec{k}\right) = |\vec{k}|^2 = 1$ не равны нулю; все другие слагаемые равны нулю. Значит, имеет место формула $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. Теорема доказана.

Лекция 9. Плоскость и прямая в пространстве

Сначала заметим, что множество всех точек $M(x,y,z) \in \mathbb{R}_3$, удовлетворяющих уравнению $F(x,y,z)=0$ (если его можно разрешить относительно хотя бы одной из переменных x,y,z) является уравнением некоторой поверхности σ. Это означает, что любая точка $M(x,y,z) \in \sigma$ удовлетворяет уравнению $F(x,y,z)=0$, и, напротив, если $M(x,y,z) \notin \sigma$, то она не удовлетворяет этому уравнению.

9.1. Общее уравнение плоскости и уравнение плоскости в отрезках

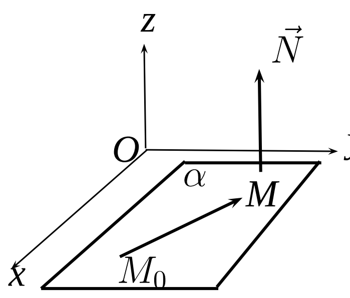

Рис. 9.1

Пусть в пространстве $\mathbb{R}_3$ задана плоскость α и пусть $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – фиксированная точка, а $M(x,y,z)$ – произвольная (текущая) точка этой плоскости. Посмотрим, какому уравнению будет подчинена произвольная точка M плоскости α (рис. 9.1). Пусть $\vec{N}=\{A,B,C\}$ – вектор нормали к плоскости α. Так как $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{N}$, то скалярное произведение $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{N}=0$, т.е.

$$\{x-x_0, y-y_0, z-z_0\} \cdot \{A,B,C\} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Мы получили

1^0) *уравнение плоскости, проходящей через фиксированную точку* $M_0(x_0,y_0,z_0)$ *с вектором нормали* $\vec{N}=\{A,B,C\}$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (9.1)$$

Раскроем в (9.1) скобки и обозначим $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$. Получим

2^0) *общее уравнение плоскости:* $Ax+By+Cz+D=0. \qquad (9.2)$

Имеет место следующее очевидное утверждение.

Теорема 9.1. *Любое линейное уравнение (9.2) задаёт в пространстве $\mathbb{R}_3$ плоскость с вектором нормали $\vec{N} = \{A, B, C\} \neq \vec{0}$. И обратно: любая плоскость в $\mathbb{R}_3$ описывается линейным уравнением (9.2).*

Если числа a, b, c не равны нулю, то уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

называют «*уравнением плоскости в отрезках*» (впредь кавычки будем опускать). При этом a, b, c являются величинами (с учётом знака) отрезков, отсекаемых плоскостью от осей Ox, Oy, Oz соответственно Эта плоскость проходит через точки $(a, 0, 0)\,, (0, b, 0)\,, (0, 0, c)$ – факт, удобный при изображении этой плоскости в пространстве. Из общего уравнения (9.2) плоскости легко получить ее уравнение в отрезках: $\frac{x}{(-D/A)} + \frac{y}{(-D/B)} + \frac{z}{(-D/C)} = 1$ (если, конечно, числа, записанные в знаменателях, существуют и не равны нулю).

9.2. Особые случаи расположения плоскости в пространстве

Следующие утверждения проверяются непосредственно.

3^0) *Если в общем уравнении (9.2) плоскости отсутствует переменная z, то эта плоскость параллельна оси Oz. Аналогичное утверждение справедливо относительно и других переменных x, y.*

4^0) *Если в общем уравнении (9.2) отсутствует свободный член D, то соответствующая плоскость проходит через начало координат $O\,(0, 0, 0)$.*

5^0) *Простейшие уравнения $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ являются уравнениями координатных плоскостей yOz, xOz, xOy соответственно.*

9.3. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей. Угол между двумя плоскостями

Пусть даны две плоскости

$\alpha: \ \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \ \ \beta: \ \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$

Эти плоскости будут параллельны или перпендикулярны друг другу, если будут параллельны (соответственно перпендикулярны) их нормальные векторы $\vec{N}_\alpha = \{A_1, B_1, C_1\}$, $\vec{N}_\beta = \{A_2, B_2, C_2\}$. Вспоминая условия коллинеарности и перпендикулярности векторов, получаем следующие утверждения.

$$6^0)\ \alpha || \beta \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

$$7^0)\ \alpha \perp \beta \ \Leftrightarrow\ A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Замечание 9.1. Если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$, то плоскости α и β совпадают.

Углом между двумя плоскостями называется двугранный угол между ними. Таких углов четыре, вертикальные из них попарно равны. Ясно, что один из них равен углу между нормалями $\vec{N}_\alpha = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\vec{N}_\beta = \{A_2, B_2, C_2\}$. Используя скалярное произведение между векторами, найдем этот угол:

$$\cos\left(\vec{N}_\alpha,^\wedge \vec{N}_\beta\right) \equiv \cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Другой двугранный угол будет равен $180^0 - \varphi$.

9.4. Решение различных задач на плоскость

Используя скалярное, векторное и смешанное произведение векторов, легко обосновать, например, следующие утверждения.

8^0) *Уравнение плоскости, проходящей через две заданные точки* $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *перпендикулярно плоскости* $Ax + By + Cz + D = 0$, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0 \quad ((x, y, z) - \text{произвольная точка плоскости}).$$

9^0) *Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки* $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, *не лежащие на одной прямой, имеет вид:*

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0 \quad ((x, y, z) - \text{текущая точка плоскости}).$$

Действительно, последнее равенство есть *условие компланарности векторов* $\vec{a} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$, $\vec{b} = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\}$, $\vec{c} = \{x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0\}$, а, значит, их смешанное произведение $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = 0$, что и записано с помощью определителя.

9.5. Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости

Пусть дано общее уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ плоскости α.

Определение 9.1. Число $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, где знак берется противоположным знаку свободного члена D, называется *нормирующим множителем плоскости* α. Уравнение

$$\mu A \cdot x + \mu B \cdot y + \mu C \cdot z + \mu D = 0$$

называется *нормальным уравнением плоскости* α.

Нетрудно доказать следующее утверждение.

Теорема 9.2. *Если* $M^* = M^*(x^*, y^*, z^*) \in \mathbb{R}_3-$ *фиксированная точка, то её расстояние до плоскости* α *вычисляется по формуле* $d = |\mu A \cdot x^* + \mu B \cdot y^* + \mu C \cdot z * + \mu D|$, *т.е. равно по модулю результату подстановки координат точки* M^* *в левую часть нормального уравнения плоскости* α.

Пример 9.1. Найти расстояние от точки $M^*(3, 5, 2)$ до плоскости $x - 2y + 2z - 3 = 0$.

Решение. Нормирующим множителем для данной плоскости будет

$$\mu = +\frac{1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{1}{3}.$$

Он противоположен по знаку свободному члену $D = -3$. Значит, нормальное уравнение плоскости будет таким: $\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 1 = 0$, а расстояние от точки $M^*\,(3, 5, 2)$ до плоскости будет равным $d = \left|\frac{1}{3}\cdot 3 - \frac{2}{3}\cdot 5 + \frac{2}{3}\cdot 2 - 1\right| = 2$.

Замечание 9.2. Величина $\delta = \delta\,(M^*) = \mu A\cdot x^* + \mu B\cdot y^* + \mu C\cdot z^* + \mu D$ называется *отклонением точки* M^* *от плоскости* α. Можно показать, что если $\delta\cdot D > 0$, *то точка* M^* *и начало координат* O *находятся по одну сторону от плоскости* α; *если же* $\delta\cdot D < 0$, то *точки* M^* *и* O *находятся по разные стороны от плоскости* α; *если же* $\delta = 0$, *то* $M^* \in \alpha$. Заметим также, что часто нормальное уравнение плоскости записывают в виде

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

где $p > 0$. Тогда $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы нормали к плоскости.

9.6. Прямая в пространстве

Прямой в пространстве называют *линию пересечения двух непараллельных плоскостей.* Значит, прямая в пространстве задается системой уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{9.3}$$

при условии отсутствия пропорциональности $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ между коэффициентами линейных уравнений, входящих в систему (9.3). Однако наиболее распространенным уравнением прямой являются *каноническое уравнение.* Выведем его

Определение 9.2. Вектор $\vec{a} = \{m, n, p\}$, параллельный данной прямой d, называется *направляющим вектором* (рис. 9.2)этой прямой.

Теорема 9.3. *Если $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ — фиксированная точка прямой d, а $\vec{a} = \{m, n, p\}$ — направляющий вектор этой прямой, то любая точка $M\,(x, y, z) \in d$ (рис. 9.2) связана уравнением*

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \tag{9.4}$$

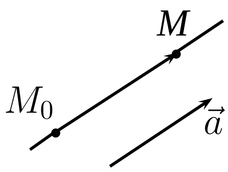

Рис. 9.2

Уравнение (9.4) называют *каноническим уравнением прямой* d.

Доказательство. Вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ коллинеарен вектору $\vec{a} = \{m, n, p\}$, а значит, их координаты пропорциональны, т.е. имеют место равенства (9.4). Если же точка $M\,(x, y, z)$ не лежит на прямой d, то векторы $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ и $\vec{a} = \{m, n, p\}$ не коллинеарны, поэтому равенства (9.4) не имеют места. Теорема доказана.

Если приравнять равные отношения (9.4) коэффициенту пропорциональности t, то получим уравнения

$$\begin{cases} x = x_0 + m \cdot t, \\ y = y_0 + n \cdot t, \quad (-\infty < t < +\infty), \\ z = z_0 + p \cdot t \end{cases} \tag{9.5}$$

задающие прямую d *параметрически* (здесь t — параметр). Изменяя t, мы получим все точки прямой d (например, при $t = 0$ получает точку M_0).

Как получить из системы уравнений (9.3) канонические уравнения прямой d? Пусть $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ — произвольная точка, удовлетворяющая системе (9.3) (ее можно получить, например, фиксируя произвольным образом координату z $(z = z_0)$, а затем решить полученную систему уравнений с двумя неизвестными). Далее, векторы $\bar{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\vec{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ перпендикулярны соответствующим плоскостям в формуле (9.3), а значит, векторное произведение $\vec{a} = \{A_1, B_1, C_1\} \times \{A_2, B_2, C_2\}$ параллельно их общей прямой — линии их пересечения. Отсюда следует, что $\vec{a}$ — направляющий вектор прямой d. Поскольку

$$\vec{a} = \{A_1, B_1, C_1\} \times \{A_2, B_2, C_2\} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \{B_1C_2 - B_2C_1, A_2C_1 - A_1C_2, A_1B_2 - A_2B_1\},$$

то *каноническим уравнением прямой* d будет уравнение

$$\frac{x - x_0}{B_1C_2 - B_2C_1} = \frac{y - y_0}{A_2C_1 - A_1C_2} = \frac{z - z_0}{A_1B_2 - A_2B_1}.$$

Ясно, что углом φ между двумя прямыми d_1 и d_2 (точнее, одним из них; обычно берут *острый угол*) является угол между их направляющими векторами, поэтому

$$\cos\varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}},$$

где $\vec{a}_1 = \{m_1, n_1, p_1\}$ – направляющий вектор прямой d_1, а $\vec{a}_2 = \{m_2, n_2, p_2\}$ – направляющий вектор прямой d_2. При этом если $\cos\varphi > 0$, то угол между прямыми будет острый. Из последней формулы получаем следующие утверждения.

$$11^0)\; d_1 \perp d_2 \;\Leftrightarrow\; m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0;$$

$$12^0)\; d_1 || d_2 \;\Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Используя полученные сведения о прямой и плоскости, можно без труда решать различные задачи аналитической геометрии. Решим, например, задачу о нахождении точки пересечения прямой (9.5) и плоскости (9.2). Подставляя равенства (9.5) в уравнение (9.2), получим уравнение $A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0$, решая которое, найдем параметр $t = t_0 = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}$, при котором происходит пересечение прямой и плоскости. Подставляя его в уравнение (9.5), найдем точку пересечения $(x_0 + m \cdot t_0, y_0 + n \cdot t_0, z_0 + p \cdot t_0)$.

Лекция 10. Матрицы. Операции над матрицами. Матрицы специального вида. Квадратные матрицы и их определители. Свойства определителей. Обратные матрицы и условие их существования. Ранг матрицы

В теории систем линейных уравнений, в дифференциальных уравнениях и др. математических объектах большую роль играют матрицы – таблицы чисел, с помощью которых можно не только компактно записать системы уравнений, но и, производя над ними определенные действия, решать сами уравнения. Перейдем к изложению основных понятий и утверждений, связанным с матрицами.

10.1. Матрицы и действия над ними. Матрицы специального вида

Определение 10.1. *Матрицей размера* $m \times n$ называют таблицу чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

состоящую из m строк $(a_{i1}, ..., a_{in})$ и n столбцов $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \equiv$ $\equiv \{a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj}\}$ $\left(i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}\right)$. При этом числа[1] a_{ij} называются *элементами матрицы* A. Матрицу A называют *квадратной матрицей размерности* m, если число m ее строк совпадает с числом n столбцов $(n = m)$. Часто матрицу обозначают так: $A = (a_{ij})$. Желая указать размеры матрицы, будем писать ${}^{m}\overline{|A}^{\,n}$, а саму матрицу будем называть $m \times n$-матрицей.

---

[1]Полезно запомнить, что в a_{ij} первый индекс i – номер строки, а j – номер столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij}.

Действия *сложения и вычитания* над матрицами *одинакового размера* определяются равенствами:

$$a)\ A \pm B \equiv (a_{ij}) \pm (b_{ij}) \overset{def}{=} (a_{ij} \pm b_{ij})$$

(т.е. при сложении или вычитании матриц складываются (соответственно вычитаются) их элементы, находящиеся на одинаковых местах).

б) Умножение матрицы на число определяется равенством

$$\alpha \cdot A \equiv \alpha \cdot (a_{ij}) \overset{def}{=} (\alpha a_{ij})$$

(т.е. при умножении матрицы на число надо каждый элемент этой матрицы умножить на это число).

Матрицы можно умножать друг на друга только в том случае, когда их *размеры согласованы*, т.е. когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы:

$${}^{m}\overset{p}{\boxed{A}} \cdot {}^{p}\overset{n}{\boxed{B}} = {}^{m}\overset{n}{\boxed{A \cdot B}}\,.$$

Сначала определяют произведение вектор-строки $a = (a_1, ...a_p)$ на вектор-столбец $b = \{b_1, ..., b_p\}$ (имеющих одинаковое количество компонент): $a \cdot b \overset{def}{=} \sum_{j=1}^{p} a_j b_j = a_1 b_1 + \cdots + a_p b_p$. Затем определяют произведение матриц;

в) *произведением матриц* A и B с согласованными размерами $m \times \times p$ и $p \times n$ называется $(m \times n)$-матрица $C = (c_{ij})$, (ij)-й элемент которой получен умножением i-й строки матрицы A на j-й столбец матрицы B: $c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + ... + a_{ip} b_{pj}$.

Например, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 7 & -1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & -4 & 19 \\ -18 & 9 & -7 \\ 15 & -6 & 9 \end{bmatrix}$.

Часто встречаются матрицы следующего специального вида:

1. Единичная матрица: $E \equiv I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$.

2. Диагональная матрица: $\operatorname{diag}(a_1, ..., a_n) \equiv \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$

(здесь и в матрице E все элементы вне главной диагонали $a_1, ..., a_n$ равны нулю).

3. Треугольная матрица:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ a_{11} & a_{12} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

4. Матрица трапециевидной формы:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{31} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

При решении линейных систем уравнений будут встречаться матрицы *ступенчатого вида.* Чтобы описать их, введем понятие *опорного элемента строки.* Это *не равный нулю первый слева элемент строки.* Например, в строке $\left(0, 0, \boxed{-5}, 0, 1, 0\right)$ элемент (–5) является опорным (здесь и ниже в рамке указан опорный элемент).

Определение 10.2. Матрица A называется матрицей *ступенчатого вида,* если в ней:

а) опорный элемент каждой строки находится *правее* опорного элемента предыдущей строки;

б) если в матрице есть нулевая строка, то и все следующие ее строки также нулевые.

Ясно, что диагональная, верхне-треугольная и трапециевидная матрицы являются ступенчатыми. Вот ещё один пример матрицы ступенчатого вида:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \boxed{5} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

10.2. Определители матрицы и их свойства

Мы имели уже дело с определителями второго и третьего порядков на предыдущих лекциях. Дадим теперь общее понятие определителя n-го порядка по индукции. Любой квадратной матрице вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ставится в соответствие число

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

определяемое далее (см. определение 10.5) и называемое *определителем (или детерминантом) матрицы* A. Сначала введем понятие *минора* матрицы.

Определение 10.3. В матрице $A = (a_{ij})$ на пересечении любых k строк и k столбцов стоит матрица B порядка k. Определитель матрицы B *называется минором* k*-го порядка матрицы* A.

Ясно, таких миноров может быть несколько. Пусть теперь матрица A является квадратной.

Определение 10.4. Минор $(n-1)$-го порядка, полученный из матрицы A после вычеркивания её i-й строки и j-го столбца, *называется дополнительным минором элемента* a_{ij} этой матрицы (обозначение: M_{ij}). Число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ называется *алгебраическим дополнением элемента* a_{ij} матрицы A.

Определение 10.5. Пусть в квадратной матрице $A = (a_{ij})$ выделена произвольная строка $(a_{i1}, ..., a_{in})$. *Определителем матрицы* A называется число

$$\Delta \equiv \det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + ... + a_{in} \cdot A_{in} \tag{10.1}$$

(т.е. сумма произведений элементов i-й строки на их алгебраические дополнения). Часто определитель матрицы обозначают так: $|A|$.

Как мы уже отметили ранее, определитель порядка n вычисляется по индукции: если известно правило вычисления определителей $(n-1)$-го порядка, то определитель n-го порядка вычисляется по формуле (10.1). Ранее было даны правила вычисления определителей второго и третьего порядков, поэтому по формуле (10.1) можно вычислить определители четвертого порядка и выше. Например,

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}(-1) \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+3} 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 24.$$

Перечислим основные *свойства определителей.* Сначала заметим, что матрица B, полученная из матрицы A заменой строк на столбцы с теми же номерами, называется *транспонированной* к A матрицей. Обозначение: $A^T \equiv A'$.

1^0) *При транспонировании матрицы* A *ее определитель не изменяется:* $|A^T| = |A|$.

2^0) *При перестановки каких-либо двух строк (или двух столбцов) матрицы ее определитель изменяет знак на противоположный.*

3^0) *Определитель, у которого есть нулевая строка (или нулевой столбец) равен нулю.*

4^0) *Определитель, у которого элементы одной строки (или столбца) пропорциональны элементам другой строки (или столбца) равен нулю.*

5^0) *Общий множитель элементов любой строки (или столбца) можно выносить за знак определителя :* $\begin{vmatrix} ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = k \times$
$\times \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$

6^0) *Если к какой-нибудь строке определителя прибавить другую строку, умноженную на любое число* k, *то определитель не изменится. Тоже верно и для столбцов определителя.*

7^0) *Сумма определителей* $\begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3+c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} +$
$+ \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}.$

8^0) *Определитель произведения двух квадратных матриц одной и той же размерности равен произведению определителей этих матриц:* $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

Доказательство всех этих свойств проводится с использованием определения 10.5. Докажем, например, свойство 5^0. Имеем

$$\begin{vmatrix} ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = ka_1 \cdot A_{11} + ka_2 \cdot A_{12} + ka_3 \cdot A_{13} =$$

$$= k\,(a_1 \cdot A_{11} + a_2 \cdot A_{12} + a_3 \cdot A_{13}) = k \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Свойство 5^0 доказано.

10.3. Обратимость матриц. Вычисление обратной матрицы

Определение 10.6. Говорят, что квадратная матрица A *обратима*, если существует квадратная матрица B (той же размерности) такая, что $AB = BA = E$. При этом матрица B называется *обратной к матрице* A и обозначается $B = A^{-1}$.

Нетрудно показать, что если матрица A обратима, то *она имеет единственную* обратную матрицу $B = A^{-1}$.

Теорема 10.1. *Для того чтобы матрица A была обратимой, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был не равен нулю (в этом случае матрица A называется невырожденной или неособой матрицей). При этом её обратная матрица имеет вид*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

где A_{ij}— алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A.

Например,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

(эту формулу полезно запомнить),

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{32} \begin{bmatrix} -10 & -6 & 22 \\ -5 & -3 & -5 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{16} & \frac{3}{16} & -\frac{11}{16} \\ \frac{5}{32} & \frac{3}{32} & \frac{5}{32} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

10.4. Ранг матриц. Теорема о базисном миноре

Сначала введем понятие *линейной зависимости и независимости строк (столбцов) матрицы.*

Определение 10.7. Строки $a_1 = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1m}), ..., a_k = (a_{k1}, a_{k2}, ..., a_{km})$ называются *линейно зависимыми,* если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k,$ *не равные нулю одновременно*, такие, что имеет место равенство

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_k a_k = 0. \tag{10.2}$$

Если же равенство (10.2) (где α_j – числа) имеет место тогда и только тогда, когда все числа α_j *одновременно равны нулю* ($\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0$), то строки $a_1 = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1m}), ..., a_k = (a_{k1}, a_{k2}, ..., a_{km})$ называются *линейно независимыми.* Аналогичные понятия вводятся и для столбцов.

Например, строки $(1, 3, 4), (2, 6, 8)$ линейно зависимы, так как $2(1, 3, 4) - (2, 6, 8) = 0$ (здесь $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = -1$), а столбцы $b_1 = \{1, 2, -1\}, b_2 = \{2, 4, 3\}$ линейно независимы, так как

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0, \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0, \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -2\alpha_2, \\ -4\alpha_2 + 4\alpha_2 = 0, \\ 2\alpha_2 + 3\alpha_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_2 = \alpha_1 = 0.$$

Введем теперь следующее важное понятие.

Определение 10.8. *Рангом произвольной матрицы* A (размера $m \times n$) *называется максимальное число линейно независимых столбцов* этой матрицы. Обозначение: $\operatorname{rg} A$.

Например, ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -10 \end{pmatrix}$ равен 1, так как только один столбец этой матрицы (любой) линейно независим, а два столбца линейно зависимы.

Пусть дана произвольная матрица A. Будем последовательно рассматривать в ней миноры первого, второго, третьего и т.д. порядков.

Определение 10.9. *Базисным минором матрицы* A называется такой *отличный от нуля минор* r*-го порядка*, что все миноры матрицы A порядка выше r-го равны нулю.

Нетрудно доказать следующее утверждение.

Теорема о базисном миноре. *Ранг матрицы* A *равен порядку базисного минора этой матрицы.*

Отсюда, в частности, следует, что при транспонировании матрицы ее ранг не изменяется, поэтому *ранг матрицы равен также максимальному числу ее линейно независимых строк.* Из теоремы о базисном миноре также вытекает, что *ранг матрицы ступенчатого вида равен числу её опорных элементов.*

Лекция 11. Элементарные преобразования и приведение матрицы к ступенчатому виду. Линейные системы алгебраических уравнений. Линейное пространство, размерность, базис. Теорема Кронекера—Капелли. Структура общего решения однородной и неоднородной систем уравнений. Метод Гаусса решения алгебраических систем уравнений

В основе решения систем линейных уравнений лежат два метода – метод Крамера и метод Гаусса, к изложению которых мы переходим.

11.1. Элементарные преобразования и приведение матриц к ступенчатому виду

К *элементарным преобразованиям строк матрицы* относятся следующие преобразования:

1) перемена строк местами; 2) умножение элементов любой строки на не равное нулю число; 3) прибавление к любой строке матрицы линейной комбинации других ее строк.

Аналогичные преобразования над столбцами называются *элементарными преобразованиями столбцов матрицы.*

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 11.1. *Элементарные преобразования строк (или столбцов) матрицы не изменяют её ранга. Элементарными преобразованиями строк всегда можно привести матрицу к ступенчатому виду (а дополнительными элементарными преобразованиями ее столбцов можно привести матрицу к трапециевидной форме).*

Например,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 6 & 2 \end{bmatrix} \to B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & -5 & 7 & -3 \end{bmatrix} \to C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь мы проделали следующие операции:

1) ко второй строке матрицы A прибавили первую строку, умноженную на (–2); от третьей строки исходной матрицы A отняли её вторую строку; в итоге получили матрицу B;

2) к третьей строке матрицы B прибавили ее вторую строку; получили матрицу C ступенчатого вида (трапециевидной формы).

11.2. Линейные системы алгебраических уравнений. Теорема Кронекера—Капелли

Системой m уравнений с n неизвестными называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{11.1}$$

где $x_1, ..., x_n$ – неизвестные, a_{ij}, b_j – известные числа (коэффициенты системы), $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Вводя обозначения

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

можно записать систему (11.1) в краткой форме $Ax = b$. Её называют *матричной формой* записи системы (11.1). При этом столбец x называют столбцом неизвестных, матрицу A – матрицей системы (11.1), а столбец b – столбцом свободных членов (или правых частей) системы (11.1). Если столбец свободных членов $b = 0,$ то система (11.1) называется *однородной системой;* если $b \neq 0$, то (11.1) называется *неоднородной системой.*

Определение 11.1. *Решением системы (11.1)* называется совокупность неизвестных $x_1 = x_1^0, ..., x_n = x_n^0,$ которая, будучи подставленная в уравнения (11.1), обращает их в верные числовые равенства (другое определение: *решением системы (11.1)* называется вектор-столбец $x = x_0 = \left\{x_1^0, ..., x_n^0\right\}$, обращающий систему $Ax = b$ в истинное векторное равенство $Ax_0 = b$). При этом если система (11.1) имеет хотя бы одно решение, то она называется *совместной (или разрешимой).* Если (11.1) не имеет решений, то она называется *несовместной (или неразрешимой).* Система, имеющая только одно решение, называется *определённой системой.* Система, имеющая более одного решений, *называется неопределённой системой.*

Рассмотрим систему (11.1) в матричной форме $Ax = b$. Как уже говорилось ранее, A называется матрицей коэффициентов или просто матрицей системы (11.1) . Если к этой матрице присовокупить справа столбец b свободных членов, то получим матрицу $\hat{A} = (A|b)$, называемую *расширенной матрицей системы уравнений (11.1).* Эта матрица играет важную роль в теории линейных систем уравнений. Например, по ней можно судить, будет ли система (11.1) разрешимой или нет. Имеет место следующее утверждение.

Теорема Кронекера—Капелли. *Для того чтобы система линейных уравнений $Ax = b$ была совместной необходимо и достаточно, чтобы* $\operatorname{rg} \hat{A} = \operatorname{rg} A$.

Следствие 11.1. *Однородная система $Ax = 0$ всегда совместна* (это утверждение вытекает также из того, что однородная система имеет тривиальное решение $x = 0$).

11.3. Линейные пространства и базис. Структура общего решения однородной системы уравнений

Рассмотрим теперь более подробно однородную систему

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \ Ax = 0 \tag{11.2}$$

и попробуем установить свойства ее решений. Сначала введем некоторые понятия, о которых подробно будет сказано в следующих лекциях.

Определение 11.2. Произвольное множество L называется *линейным пространством над множеством чисел K* , если в нем для любых двух элементов $x, y \in L$ введены две операции: операция сложения $((x,y) \to x + y \in L)$ и операция умножения на числа λ $((x,\lambda) \to \lambda \cdot x \in L)$, подчиняющиеся следующим восьми аксиомам:

$A\oplus : x + (y + z) = (x + y) + z$; $K\oplus : x + y = y + x$; $H\oplus : (\exists \theta \in \in L)\,(\theta + x = x)$; $O\oplus : \forall x \in L\ \exists y \in L : x + y = \theta$ (элемент y называется *обратным или противоположным* к элементу x и обозначается $y = -x$; элемент θ называется *нулевым или нейтральным элементом* пространства L);

$A\odot : \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$; $H\odot : (\exists 1 \in K)\,(1 \cdot x = x\, \forall x \in L)$ (элемент 1 называется *нейтральным элементом умножения на числа*);

$$D_1 : (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x; \;\; D_2 : \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y.$$

Здесь x, y, z – произвольные элементы множества L, а λ, μ – произвольные числа из K. Нейтральный элемент θ обычно отождествляют с нулем: $\theta = 0$.

Элементы линейного пространства часто называют *векторами* и мы будем в дальнейшем также пользоваться этим термином. Простейшими примерами линейных пространств являются множества $\mathbb{R}$ действительных чисел (с естественными операциями сложения и умножением на числа), а также пространство R^3 геометрических векторов, рассмотренное ранее, с введенными в нем линейными операциями сложения и умножения на действительные числа. В качестве другого важного примера линейного пространства можно указать на пространство M^{mn} матриц размера $m \times n$ с введенными ранее операциями сложения матриц и умножения их на числа. В частности, линейными пространствами будут пространство столбцов:

$$\mathbb{R}^n = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\, x_j \in \mathbb{R}, j = \overline{1,n} \right\}$$

и пространство строк: $\mathbb{R}_n = \left\{ x = (x_1, ..., x_n)\,,\ x_j \in \mathbb{R}, j = \overline{1,n} \right\}.$

Ранее было введено понятие линейной зависимости и линейной независимости строк и столбцов. Точно такие же понятия вводятся и в произвольном линейном пространстве L.

Определение 11.3. Упорядочная система векторов $e_1, ..., e_n$ линейного пространства L называется *базисом* в L, если она удовлетворяет следующим требованиям:

1) система $e_1, ..., e_n$ линейно независима;

2) каков бы ни был вектор $x \in L$ существуют числа $x_1, ..., x_n$ такие, что имеет место представление

$$x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n \equiv (e_1, ..., e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

причем это представление единственно. Числа $x_1, ..., x_n$ называются *координатами вектора* x *в базисе* $e_1, ..., e_n$, *а столбец* $\{x_1, ..., x_n\}$ – *координатным столбцом вектора* x.

Заметим, что если в пространстве L существует базис, состоящий из *конечного числа* n векторов, то пространство L называется *конечномерным* (n*-мерным;* пишут $\dim L = \; = n$ – *размерность пространства* L). В противном случае L называется *бесконечномерным пространством.*

Так же, как и в трехмерном пространстве R^3 геометрических векторов, устанавливается взаимно однозначное соответствие $L \leftrightarrow \mathbb{R}^n$ между элементами $x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n \in L$ и их координатными столбцами $\{x_1, ..., x_n\} \in \mathbb{R}^n$ по закону:

$$x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n \equiv (e_1, ..., e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in L \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Нетрудно видеть, что это соответствие[2] сохраняет линейные операции, поэтому вместо линейных действий над векторами пространства

[2]Взаимно однозначное соответствие между двумя множествами, сохраняющее линейные операции между ними, называется линейным изоморфизмом этих множеств.

L производят аналогичные действия над их координатами. Перейдем теперь к рассмотрению линейной однородной системы (11.2). Используя теорему о базисном миноре и тот факт, что линейная система (11.2) равносильна системе с матрицей ступенчатого вида, полученной из матрицы A эквивалентными преобразованиями строк, докажем следующий результат.

Теорема 11.2. *Множество всех решений однородной системы (11.2) (состоящей из m уравнений с n неизвестными) образует линейное пространство L_0 размерности $n - r = n - \operatorname{rg} A$. При этом любое решение x однородной системы (11.2) имеет вид*

$$x = c_1 f_1 + ... + c_{n-r} f_{n-r}, \tag{11.3}$$

где $f_1, ..., f_{n-r}$ – базис пространства решений L_0 (его называют фундаментальной системой решений однородной системы (11.2)); $c_1, ..., c_{n-r}$ – некоторые постоянные.

Заметим, что линейная комбинация $c_1 f_1 + ... + c_{n-r} f_{n-r}$, где $c_1, ..., c_{n-r}$ – произвольные постоянные, $f_1, ..., f_{n-r}$ – фундаментальная система решений системы (11.2), называется *общим решением* этой системы и обозначается $x_{оо}$.

Таким образом, построение общего решения системы (11.2) сводится к построению её фундаментальной системы решений (ф.с.р.). Как найти ф.с.р.? Ответу на этот вопрос мы предпошлем описание алгоритма построения общего решения неоднородной системы (11.1).

11.4. Структура общего решения неоднородной системы уравнений. Алгоритм метода Гаусса построения общего решения линейной алгебраической системы уравнений

Рассмотрим неоднородную систему (11.1). Сначала заметим, что разность $x - \tilde{x}$ двух ее решений будет решением соответствующей однородной системы $Ax = 0$. Действительно, имеем верные равенства $Ax = b$ и $A\tilde{x} = b$, поэтому $A(x - \tilde{x}) = Ax - A\tilde{x} = b - b = 0$, т.е. разность $x - \tilde{x}$ является решением однородной системы (11.2). Отсюда следует, что вектор $x = x_* + x_{00}$, где x_* – фиксированное решение неоднородной системы $Ax = b$, а $x_{00} = c_1 f_1 + ... + c_{n-r} f_{n-r}$ – общее решение соответствующей однородной системы $Ax = 0$, будет решением неоднородной системы (11.1) при любых значениях постоянных $c_1, ..., c_{n-r}$. Если теперь $x = \tilde{x}$ – любое другое решение неоднородной системы $Ax = b$, то его можно представить в виде $\tilde{x} = c_1^0 f_1 + ... + c_{n-r}^0 f_{n-r} + x_*$. Действительно, разность $\tilde{x} - x_*$ является решением однородной системы $Ax = 0$, а значит, по теореме 11.2 существуют постоянные $c_1 = c_1^0, ..., c_{n-r} = c_{n-r}^0$ такие, что имеет место равенство

$$\tilde{x} - x_* = c_1^0 f_1 + ... + c_{n-r}^0 f_{n-r} \Leftrightarrow \tilde{x} = x_* + c_1^0 f_1 + ... + c_{n-r}^0 f_{n-r},$$

что требовалос доказать. Мы получили следующий результат.

Теорема 11.3. *Общее решение неоднородной системы $Ax = b$ имеет вид*

$$x = c_1 f_1 + ... + c_{n-r} f_{n-r} + x_* \Leftrightarrow x_{он} = x_{оо} + x_{чн}, \tag{11.4}$$

где $x_* = x_{чн}$ – частное решение неоднородной системы $Ax = b$, $f_1, ..., f_{n-r}$ – фундаментальная система решений соответствующей однородной системы $Ax = 0$, а $c_1, ..., c_{n-r}$ – произвольные постоянные.

Теперь опишем алгоритм построения общего решения неоднородной системы (11.1).

Алгоритм метода Гаусса

1. По системе (11.1) строим расширенную матрицу $\hat{A} = (A|b)$.

2. С помощью элементарных преобразований строк приводим матрицу $\hat{A}$ к ступенчатому виду $\hat{B} = (B|d)$.

3. По матрице $\hat{B} = (B|d)$ восстанавливаем систему уравнений; при этом уравнения, соответствующие нулевым строкам матрицы $\hat{B}$ не выписываем.

4. Неизвестные, коэффициентами которых являются опорные элементы матрицы $\hat{B}$, объявляем базисными (закрепленными), оставляем их в левых частях уравнений, а остальные неизвестные объявляем свободными и переносим их в правые части уравнений.

5. Придавая свободным неизвестным значения произвольных постоянных, решаем полученную систему уравнений обратным ходом, находим базисные неизвестные и , наконец, записываем общее решение исходной системы уравнений в виде (11.4).

Пример 11.1. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 7 \\ 4 & -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -11 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (11.5)$$

Решение. Составляем расширенную матрицу $\hat{A}$ и приводим её к ступенчатому виду $\hat{B}$ (опорные элементы выделены в квадратиках):

$$\hat{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 4 & -6 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -11 & -15 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -11 & 0 \\ 2 & -3 & -11 & -15 & 1 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & -22 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-8} & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \hat{B}.$$

По матрице $\hat{B}$ восстанавливаем преобразованную систему уравнений (нулевую строку не учитываем):

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 0x_1 + 0x_2 - 8x_3 - 11x_4 = 0. \end{cases}$$

Базисными неизвестными являются x_1 и x_3; оставляем их слева. Полагая значения свободных неизвестных произвольными: $x_2 =$

$= c_2$, $x_4 = c_4$, перенесём их направо. Будем иметь

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_3 = 1 + 3c_2 - 7c_4, \\ -8x_3 = 11c_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = -\frac{11c_4}{8}, \\ x_1 = \frac{1}{2}\left(1 + 3c_2 - 7c_4 + 5 \cdot \frac{11c_4}{8}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = -\frac{11c_4}{8}, \\ x_1 = \frac{1}{2}\left(1 + 3c_2 - \frac{c_4}{8}\right). \end{cases}$$

Теперь можно записать общее решение исходной системы (11.5):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{3}{2}c_2 - \frac{1}{16}c_4 \\ c_2 \\ -\frac{11c_4}{8} \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} -\frac{1}{16} \\ 0 \\ -\frac{11}{8} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда и из теоремы 11.3 следует, что

$$x_{\text{чн}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; f_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; f_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{16} \\ 0 \\ -\frac{11}{8} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдены частное решение $x_{\text{чн}}$ системы (11.5) и ф.с.р. соответствующей однородной системы.

Лекция 12. *Правило Крамера. Линейное подпространство. Линейный оператор и его матрица в фиксированном базисе. Алгебра линейных операторов и ее связь с алгеброй матриц*

В предыдущей лекции были рассмотрены общие системы линейных уравнений. В них число уравнений могло не совпадать с числом неизвестных. Соответствующая матрица системы была в общем случае прямоугольной. В случае систем с квадратной матрицей можно указать еще два способа решения (кроме изложенного выше метода Гаусса).

12.1. Линейные системы уравнений с квадратной матрицей. Правило Крамера

Итак, рассмотрим систему n линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow Ax = b \qquad (12.1)$$

с n неизвестными $x_1, ..., x_n$. Матрица A этой системы квадратная, поэтому можно вычислить ее определитель Δ (называемый *главным определителем* системы (12.1)). Далее будут участвовать и другие определители, относящиеся к системе (12.1). Введем их. Если в определителе Δ выбросить j-й столбец и заменить его на столбец b свободных членов, то получим определитель

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & ... & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix},$$

называемый j*-м вспомогательным определителем* $\left(j=\overline{1,n}\right)$. Если определитель $\Delta \neq 0$, то для матрицы A существует обратная матрица A^{-1} и эта матрица единственна. С помощью неё можно решить систему (12.1). Действительно, умножая обе части последнего равенства (12.1) на A^{-1}, будем иметь $A^{-1}Ax = A^{-1}b \Leftrightarrow Ex = A^{-1}b \Leftrightarrow x = A^{-1}b$. Мы доказали следующее утверждение.

Теорема 12.1. *Если* $\Delta = |A| \neq 0$, *то система (12.1) имеет единственное решение* $x = A^{-1}b$.

Пример 12.1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} -2x+3y=23, \\ 5x+4y=46 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 46 \end{bmatrix}.$$

Решение. Так как определитель $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -8-15 = -23 \neq$ $\neq 0$, то данная система имеет единственное решение

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 23 \\ 46 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{23} & \frac{3}{23} \\ \frac{5}{23} & \frac{2}{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 23 \\ 46 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Другой способ решения системы (12.1) основан на следующем утверждении.

Теорема Крамера. *Пусть в системе (12.1) хотя бы один из ее коэффициентов* a_{ij} *не равен нулю. Тогда для того чтобы система (12.1) имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы её главный определитель* Δ *был не равен нулю. В этом случае решение системы (12.1) даётся формулами Крамера:*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ \ldots, \ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \tag{12.2}$$

Если $\Delta = 0$ *и хотя бы один из определителей* $\Delta_j \neq 0$, *то система (12.1) решений не имеет. Если все* $\Delta = \Delta_1 = \ldots = \Delta_n = 0$, *то система (12.1) либо не имеет решений вообще, либо имеет их бесчисленное множество.*

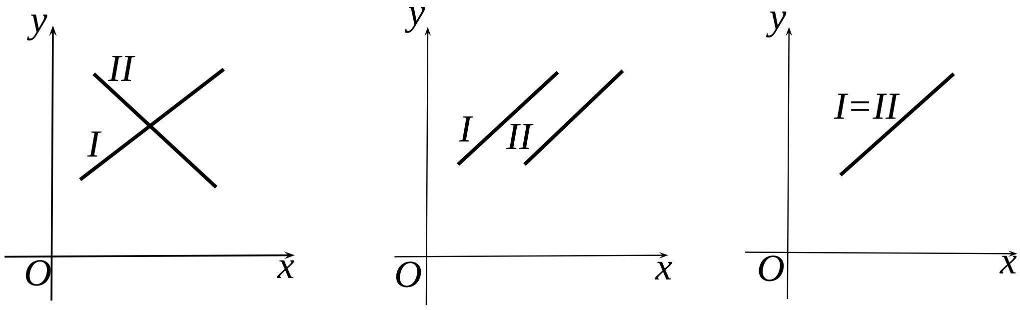

Рис. 12.1

Доказательство проведем в случае $\Delta \neq 0$ для системы

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \tag{12.3}$$

с двумя неизвестными $x_1 = x$, $x_2 = y$. Не умаляя общности, можно считать, что $a_{11} \neq 0$. Из первого уравнения (12.3) находим $x = \frac{b_1 - a_{12}y}{a_{11}}$ и подставляем во второе уравнение; будем иметь

$$\frac{a_{21}(b_1 - a_{12}y)}{a_{11}} + a_{22}y = b_2 \Leftrightarrow (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\, y = a_{11}b_2 - b_1a_{21} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta \cdot y = \Delta_2.$$

Пусть теперь $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. тогда $y = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$, поэтому

$$x = \frac{b_1 - a_{12}y}{a_{11}} = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \Leftrightarrow (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \cdot x = b_1a_{22} - a_{12}b_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta \cdot x = \Delta_1.$$

Мы показали, что в случае $\Delta \neq 0$ исходная система (12. 3) равносильна системе двух уравнений $\Delta \cdot x = \Delta_1$, $\Delta \cdot y = \Delta_2$, поэтому если $\Delta \neq 0$, то система (12. 3) имеет единственное решение $x = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$. Теорема доказана.

Геометрическая интерпретация теоремы Крамера. Уравнения (12.3) есть уравнения прямых на плоскости Oxy. Если $\Delta \neq 0$, то коэффициенты указанных прямых не пропорциональны, значит, эти прямые не параллельны , и поэтому пересекаются в одной точке (в точке $\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}\right)$)(первый слева рис. 12.1). Если $\Delta = 0$, то коэффициенты прямых (12.3) пропорциональны, т.е. $a_{21} = ka_{11}, a_{22} = ka_{12}, b_2 = kb_1$. В этом случае система (12.3) равносильна одному уравнению $a_{11}x + a_{12}y = b$, которое имеет бесчисленное множество решений $x = \frac{b_1 - a_{12}c}{a_{11}}$, $y = c$, где c – произвольная постоянная, т.е. все точки прямой $a_{11}x + a_{12}y = b$ являются решениями системы (12.3)(первый справа рис. 12.1). И, наконец, если $\Delta = 0$ и хотя бы один из определителей Δ_1, Δ_2 не равен нулю, то прямые (12.3) параллельны, а, значит, система (12.3) не имеет решений (второй слева рис. 12.1).

Пример 12.2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 4, \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 1, \\ 1x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

Решение. Вычисляем определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

По теореме Крамера эта система либо имеет бесчисленное множество решений, либо не имеет их вообще. В нашем случае $x_3 = 1$, поэтому первое и третье уравнения принимают вид $x_1 + 2x_2 = 3$, $x_1 + 2x_2 = 3$. значит данная система имеет бесчисленное множество решений.

12.2. Линейный оператор и его матрица в фиксированном базисе. Алгебра линейных операторов и ее связь с алгеброй матриц

Понятие линейного пространства было введено ранее. Дадим понятие линейного подпространства.

Определение 12.1. Подмножество L_1 линейного пространства L называется *подпространством пространства* L *над числовым множеством* K, если наряду с двумя произвольными элементами x, y, принадлежащими L_1, ему принадлежит и любая линейная комбинация $\alpha x + \beta y$ ($\alpha, \beta \in K$ $-$ числа).

Например, пространство R^2 двумерных геометрических векторов является подпространством трехмерных геометрических векторов R^3. В подпространстве L_1 существует свой базис, который можно выбрать из базисных векторов пространства L.

Введем теперь понятие линейного оператора. Сначала заметим, что *любое отображение* $\mathbf{A}: L \to M$ *пространства* L *в пространство* M, *ставящее в соответствие каждому элементу* $x \in L$ *единственный элемент* $y \in M$ *по закону* $y = \mathbf{A}(x)$, *называется оператором* (действующим из пространства L в пространство M).

Определение 12.2. Оператор $\mathbf{A}: L \to M$ называется *линейным оператором,* если выполняются свойства[3]:

а) $\mathbf{A}(x+y) = \mathbf{A}\,x + \mathbf{A}\,y$ $(\forall x, y \in L)$; б) $\mathbf{A}(\lambda x) = \lambda\mathbf{A}(x)$ $(\forall x \in L,\ \lambda \in K)$.

Свойства а) и б) можно объединить в одно: $\mathbf{A}(\alpha x + \beta y) = \alpha\mathbf{A}(x) + \beta\mathbf{A}(y)$ $(\forall x, y \in L,\ \alpha, \beta \in K)$.

Например, оператор $\mathbf{A}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, ставящий в соответствие каждому столбцу $x = \{x_1, x_2, x_3\} \in \mathbb{R}^3$ столбец $y = \{x_1, x_2\} \in \mathbb{R}^2$ будет линейным оператором, так как

$$\mathbf{A}(\alpha x + \beta z) \equiv \mathbf{A}(\alpha\{x_1, x_2, x_3\} + \beta\{z_1, z_2, z_3\}) =$$

$$= \mathbf{A}\{\alpha x_1 + \beta z_1, \alpha x_2 + \beta z_2, \alpha x_3 + \beta z_3\} =$$

[3]Если оператор $y = \mathbf{A}(x)$, линейный, то пишут $y = \mathbf{A}\,x$, опуская скобки.

$$= \{\alpha x_1 + \beta z_1, \alpha x_2 + \beta z_2\} = \alpha \{x_1, x_2\} + \beta \{z_1, z_2\} = \alpha \mathbf{A}(x) + \beta \mathbf{A}(z).$$

Этот оператор называется оператором *проектирования.* В качестве другого важного примера можно указать оператор, являющийся матрицей $B \in M^{mn}$ размера $m \times n$. Этот оператор действует из пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^m$. Действительно,

$$Bx \equiv \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}x_1 + ... + b_{1n}x_n \\ \vdots \\ b_{m1}x_1 + ... + b_{mn}x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Значит, оператор $\mathbf{A} = B$ действует из пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^m$. Далее, из определения действий над матрицами вытекает свойство $B(\alpha x + \beta y) = \alpha Bx + \beta Bx$ для любых столбцов $x, y \in \mathbb{R}^n$ и любых чисел $\alpha, \beta \in R$. Поэтому матрица $\mathbf{A} = B$ является линейным оператором.

Обозначим через $\mathscr{L}(L, M)$ множество всех линейных операторов $\mathbf{A}: L \to M$. В этом множестве естественным образом вводятся линейные операции над операторами:

$$(\alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{B})\, x \overset{def}{=} \alpha \mathbf{A}\, x + \beta \mathbf{B}\, x \ (\forall x \in L, \forall \alpha, \beta \in K)$$

(при $\alpha = \beta = 1$ получаем сумму операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, при $\beta = 0$ получаем умножение оператора на число). Нетрудно показать, что пространство $\mathscr{L}(L, M)$ является линейным пространством. Можно ввести даже операцию умножения операторов $\mathbf{A}: L \to M$ и $\mathbf{B}: M \to H$:

$$(\mathbf{AB})\, x = \mathbf{A}(\mathbf{B}\, x) \ (\forall x \in L).$$

Если $L = M = H$, то в множестве всех линейных операторов $\mathbf{A}: L \to L$ будут определены линейные операции и операция умножения операторов. Такое множество называется *алгеброй операторов.*

Важным понятием в линейной алгебре является понятие *матрицы линейного оператора.* Введем его. Пусть оператор $\mathbf{A}: L \to M$ является линейным и пусть $\dim L = n$, $\dim M = m$. Зафиксируем в пространстве L базис $\{e_1, ..., e_n\}$. Тогда любой вектор $x \in L$ можно записать в виде $x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n$. Точно так же, если в пространстве M зафиксировать базис $\{f_1, ..., f_m\}$, то любой вектор $y \in M$ можно записать в виде

$$y = y_1 f_1 + ... + y_m f_m \equiv (f_1, ..., f_m) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}. \tag{12.4}$$

Так как образы базисных векторов $\mathbf{A}\, e_1, ..., \mathbf{A}\, e_n$ принадлежат пространству M, то их можно (согласно выражению (12.4)) разложить по базису $f_1, ..., f_m$:

$$\mathbf{A}\, e_1 = (f_1, ..., f_m) \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., \mathbf{A}\, e_n = (f_1, ..., f_m) \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если ввести матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, то совокупность последних равенств можно записать в виде

$$(\mathbf{A}\, e_1, ..., \mathbf{A}\, e_n) = (f_1, ..., f_m) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \equiv (f_1, ..., f_m)\, A.$$

Полученную таким образом матрицу $A \in M^{mn}$ называют матрицей оператора $\mathbf{A}$. Сформулируем это понятие более точно.

Определение 12.3. *Матрицей оператора* $\mathbf{A} : L \to M$ *в базисах* $\{e_1, ..., e_1\} \subset L$ *и* $\{f_1, ..., f_m\} \subset M$ *называется матрица* A (размера $m \times n$), j-й столбец которой является координатным столбцом вектора $\mathbf{A}\, e_j$ (образа j-го базисного вектора e_j пространства L) в базисе $\{f_1, ..., f_m\}$.

Далее, если не оговорено противное, будем считать, что все операторы $\mathbf{A}$ действуют из пространства L в себя, т.е. $\mathbf{A} : L \to L$. В этом случае матрицу A называют матрицей оператора $\mathbf{A}: L \to L$ в базисе $\{e_1, ..., e_1\}$

Пример 12.3. Пусть пространство L является пространством квадратных трехчленов: $L = \left\{x : \ x = at^2 + bt + c, \ \ a, b, c \in R\right\}$. Выберем в нем базис $e_1 = 1, e_2 = t, e_3 = t^2$. Тогда каждый элемент пространства L можно записать в виде

$$x = at^2 + bt + c = (e_1, e_2, e_3)\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу оператора дифференцирования $\mathbf{A}\,x = \left(\frac{d^2}{dt^2} + 5\frac{d}{dt}\right)x : L \to L$ (здесь $M = L$). Так как $f_1 = e_1 = 1 = 1, f_2 = e_2 = t, f_3 = e_3 = t^2$, то

$$\mathbf{A}\,e_1 = \left(\tfrac{d^2}{dt^2} + 5\tfrac{d}{dt}\right)1 = 0 = (e_1, e_2, e_3)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}\,e_2 = \left(\tfrac{d^2}{dt^2} + 5\tfrac{d}{dt}\right)t = 5 = (e_1, e_2, e_3)\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}\,e_3 = \left(\tfrac{d^2}{dt^2} + 5\tfrac{d}{dt}\right)t^2 = 2 + 10t = (e_1, e_2, e_3)\begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрица A оператора $\mathbf{A}\,x = \left(\frac{d^2}{dt^2} + 5\frac{d}{dt}\right)x$ (согласно определению 12.3) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно доказать следующее утверждение.

Теорема 12.2. *Если A и B — матрицы операторов $\mathbf{A}: L \to L$ и $\mathbf{B}: L \to L$ соответственно (в одном и том же базисе $\{e_1, ..., e_n\}$),* *то матрицами операторов* $\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{B}$ *(*$\alpha,\beta-$ *числа) и* $\mathbf{AB}$ *в том же базисе* $\{e_1,...,e_n\}$ *будут соответственно матрицы* $\alpha A+\beta B,\ AB$.

Из этой теоремы вытекает, что линейные операции над операторами и операция умножения операторов можно заменить на аналогичные операции над их матрицами. Поэтому, например, вместо того, чтобы решить операторное уравнение $\mathbf{A}\,x=b$, достаточно решить матричное уравнение $A\cdot\{x_1,...,x_n\}=\{b_1,...,b_n\}$, а затем восстановить вектор $x=x_1e_1+...+x_1e_1$ (здесь A – матрица оператора $\mathbf{A}$ в базисе $e_1,...,e_n$, $\{x_1,...,x_n\}$, $\{b_1,...,b_n\}-$ координатные столбцы векторов x и b в том же базисе).

Пример 12.4. Решить дифференциальное уравнение $\frac{d^2y}{dt^2}+5\frac{dy}{dt}=$ $=-2t+8$.

Решение. Выбрав в пространстве квадратных трехчленов $L=$ $=\left\{x:\ x=at^2+bt+c,\ \ a,b,c\in R\right\}$ базис $e_1=1,e_2=t,e_3=t^2$ (см. пример 12.2), запишем данное дифференциальное уравнение в матричной форме

$$\begin{pmatrix}0&5&2\\0&0&10\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-2\\0\end{pmatrix}.$$

Его решением является вектор-столбец

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\\frac{42}{25}\\\frac{-1}{5}\end{pmatrix}.$$

Значит, решением данного уравнения будет функция $y=y\,(t)=$ $=c+\frac{42}{25}t-\frac{1}{5}t^2$, где c – произвольная постоянная. Заметим, что мы нашли все решения данного уравнение в пространстве квадратных трёхчленов. Не исключено, что оно имеет и другие решения, не входящие в пространство $L=\left\{x:\ x=at^2+bt+c,\ \ a,b,c\in R\right\}$.

Пример 12.5. Даны линейные преобразования в пространстве $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{A}\,x \equiv \mathbf{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_1 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B}x \equiv \mathbf{B}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Построить преобразование $\mathbf{AB}^2 - \mathbf{BA}$ и найти его матрицу в стандартном базисе $e_1 = \{1,0,0\}\,, e_2 = \{0,1,0\}\,, e_3 = \{0,0,1\}$ пространства $\mathbb{R}^3$.

Решение. Воспользуемся теоремой 12. 2. Если A и B – матрицы операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ в базисе e_1, e_2, e_3, то матрицей оператора $\mathbf{AB}^2 - \mathbf{BA}$ в том же базисе будет матрица $AB^2 - BA$. Построим эту матрицу, а затем восстановим по ней само преобразование $\mathbf{AB}^2 - \mathbf{BA}$. Вычисляя образы базисных векторов для операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, построим их матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем матрицу

$$A^2B - BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Значит, $\left(\mathbf{AB}^2 - \mathbf{BA}\right) x = \{-2x_1, -3x_1, 3x_3\}\,.$

Лекция 13. Изменение координат вектора и матрицы оператора при переходе к новому базису. Ядро и образ оператора. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Матрица оператора в базисе из собственных векторов

В предыдущей лекции были определены две алгебры: алгебра линейных операторов и алгебра матриц. Было отмечено, что обе эти алгебры взаимосвязаны между собой и что при решении операторных уравнений можно пользоваться соответствующими им матричными уравнениями. Однако не был затронут вопрос об изменении матрицы оператора и координат вектора при переходе к новому базису. Восполним этот пробел.

13.1. Изменение координат вектора и матрицы оператора при переходе к новому базису

Пусть линейный оператор $\mathbf{A} : L \to L$, действует из пространства L в себя и пусть в линейном пространстве L выбраны два базиса: $\{e_1, ..., e_n\}$ и $\{g_1, ..., g_n\}$. Разложим «новые» базисные векторы $g_1, ..., g_n$ в линейные комбинации «старых» базисных векторов $e_1, ..., e_n$:

$$\begin{cases} g_1 = t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + ... + t_{n1}e_n, \\ g_2 = t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + ... + t_{n2}e_n, \\ \qquad \cdots \\ g_n = t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + ... + t_{nn}e_n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (g_1, g_2, ..., g_n) = (e_1, ..., e_n) \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \vdots & t_{21} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \vdots & t_{n1} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (g_1, g_2, ..., g_n) = (e_1, ..., e_n)\, T.$$

Стоящая здесь матрица T, j*-м столбцом которой является координатный столбец* j*-го базисного вектора* g_j *в «старом» базисе*

$\{e_1, ..., e_n\}$, *называется матрицей перехода от «старого» базиса к «новому»*. Если теперь $\{x_1, ..., x_n\}$ – координаты вектора $x \in L$ в «старом» базисе $\{e_1, ..., e_n\}$, а $\{x'_1, ..., x'_n\}$ – координаты того же вектора x в «новом» базисе $\{g_1, ..., g_n\}$, то имеет место равенство

$$(e_1, ..., e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (g_1, ..., g_n) \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = (e_1, ..., e_n)\, T \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}. \tag{13.1}$$

Так как разложение по базису $e_1, ..., e_n$ единственно, то отсюда следует, что

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{13.2}$$

Получен следующий результат.

Теорема 13.1. *Координаты $\{x_1, ..., x_n\}$ вектора $x \in L$ в базисе $\{e_1, ..., e_n\}$ и координаты $\{x'_1, ..., x'_n\}$ того же вектора в базисе $\{g_1, ..., g_n\}$ связаны соотношениями (13.2), где T – матрица перехода от «старого» базиса $\{e_j\}$ к «новому« $\{g_j\}$.*

Посмотрим теперь, как связаны между собой матрицы A и B одного и того же оператора $\mathbf{A} : L \to L$ в различных базисах $\{e_j\}$ и $\{g_j\}$ пространства L. Матрицы A и B определяются равенствами $(\mathbf{A}\, e_1, ..., \mathbf{A}\, e_1) = (e_1, ..., e_n)\, A$, $(\mathbf{A}\, g_1, ..., \mathbf{A}\, g_n) = (g_1, ..., g_n)\, B$. Пусть $y = \mathbf{A}\, x \ (\forall x, y \in L)$. Это равенство в базисе $\{e_j\}$ равносильно матричному равенству

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

а в базисе $\{g_j\}$ – матричному равенству

$$B \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

(здесь приняты те же обозначения, что и в формуле (13.1)). Используя теорему 13.1, будем иметь

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AT \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = TB \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

Так как столбец $\{x_1', ..., x_n'\} \in \mathbb{R}^n -$ произвольный, то отсюда получаем равенство

$$AT = TB \;\Leftrightarrow B = T^{-1}AT. \tag{13.3}$$

Доказан следующий результат.

Теорема 13.2. *Если* A *– матрица оператора* $\mathbf{A} : L \to L$ *в базисе* $\{e_1, ..., e_n\}$, *а* B *– матрица того же оператора в базисе* $\{g_1, ..., g_n\}$, то $B = T^{-1}AT$, где T – матрица перехода от «старого» базиса $\{e_j\}$ к «новому« $\{g_j\}$.

Замечание 13.1 Две произвольные матрицы A и B, связанные соотношением $B = T^{-1}AT$, где T – некоторая невырожденная матрица $(\det T \neq 0)$, *называются подобными матрицами.* Таким образом, две матрицы одного и того же оператора в различных базисах подобны.

Пример 13.1. Матрица A оператора $\mathbf{A} : L \to L$ в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу B этого оператора в базисе $g_1 = e_1 + e_2 + 2e_3$, $g_2 = 2e_1 - e_2$, $g_3 = -e_1 + e_2 + e_3$. Вычислить координаты вектора $x = -2e_1 + 3e_2 + 5e_3$ в базисе $\{g_1, g_2, g_3\}$.

Решение. Матрица T перехода от старого базиса к новому и обратная к ней матрица имеют вид

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix},$$

поэтому по теореме 13. 2 матрица B оператора $\mathbf{A} : L \to L$ и новом базисе будет такой:

$$B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & 6 & -8 \\ 11 & -9 & 12 \\ 15 & -16 & 19 \end{pmatrix}.$$

Далее, вектор x имеет следующий координатный столбец в базисе $\{e_1, e_2, e_3\} : \{x_1, x_2, x_3\} = \{-2, 3, 5\}$. По теореме 13.1 координатный столбец этого вектора в базисе g_1, g_2, g_3 будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Замечание 13.2. Можно обобщить этот результат на операторы, действующие из одного линейного пространства в другое. Пусть оператор $\mathbf{A} : L \to M$ действует из линейного пространства L в другое линейное пространство M и пусть в пространстве L выбраны два базиса: $\{e_1, ..., e_n\}$ и $\{\hat{e}_1, ..., \hat{e}_n\}$, а в пространстве M – два базиса $\{f_1, ..., f_m\}$ и $\{\hat{f}_1, ..., \hat{f}_m\}$. Тогда можно составить две матрицы A и B линейного оператора $\mathbf{A} : L \to M$:

$$(\mathbf{A}\, e_1, ..., \mathbf{A}\, e_n) = (f_1, ..., f_m)\, A, \quad (\mathbf{A}\, \hat{e}_1, ..., \mathbf{A}\, \hat{e}_n) = \left(\hat{f}_1, ..., \hat{f}_m\right) B,$$

и две матрицы T и F перехода от «старых» базисов к «новым»:

$$(\hat{e}_1, ..., \hat{e}_n) = (e_1, ..., e_n)\,T, \ \left(\hat{f}_1, .., \hat{f}_m\right) = (f_1, .., f_m)\,F.$$

Нетрудно показать, что в этом случае имеет место равенство

$$B = F^{-1}AT.$$

13.2. Ядро и образ линейного оператора

Пусть дан линейный оператор $\mathbf{A} : L \to M$, действующий из линейного пространства L в линейное пространство M. Следующие понятия бывают полезными при решении линейных уравнений.

Определение 13.1. *Ядром оператора* $\mathbf{A}$ называется множество $\operatorname{Ker}\mathbf{A} = \{x \in L : \mathbf{A}\,x = 0\}$. *Образом оператора* $\mathbf{A}$ называется множество $\operatorname{Im}\mathbf{A} = \{y \in M / \,\exists x \in L : y = \mathbf{A}\,x\}$.

Нетрудно доказать следующее утверждение.

Теорема 13.3. *Ядро и образ линейного оператора являются линейными подпространствами пространств L и M соответственно, причем имеет место равенство* $\dim\operatorname{Ker}\mathbf{A}+\dim\operatorname{Im}\mathbf{A} = \dim L$.

Для вычисления ядра оператора $\mathbf{A}$ надо записать уравнение $\mathbf{A}\,x = 0$ в матричной форме (выбрав базисы $\{e_1, ..., e_n\} \subset \subset L$, $\{f_1, ..., f_m\} \subset M$ в пространствах L и M соответственно) и решить соответствующую алгебраическую систему уравнений. Поясним теперь, как можно вычислить образ оператора $\mathbf{A}$.

Пусть A – матрица оператора $\mathbf{A}$ в в базисах $\{e_1, ..., e_n\} \subset L$ и $\{f_1, ..., f_m\} \subset M$. Обозначим через A_j j-й столбец матрицы A. Принадлежность вектора y образу $\operatorname{Im}A$ означает, что существуют числа $x_1, ..., x_n$ такие, что вектор столбец y представляется в виде $y = x_1A_1 + ... + x_nA_n$, т.е. y является элементом пространства линейных комбинаций столбцов $A_1, ..., A_n$ матрицы A. Выбрав в этом пространстве базис $A_{i_1}, ..., A_{i_r}$ (например, максимальную совокупность линейно независимых столбцов матрицы A), вычислим сначала образ *оператора-матрицы* A : $\operatorname{Im}A =$

$= \ \left\{ y \in M / y = \alpha_{i_1} A_{i_1} + ... + \alpha_{i_r} A_{i_r}, \ \alpha_{i_k} \in \mathbb{R}, \, k = \overline{1, r} \right\}$, а затем построим образ оператора $\mathbf{A}$:

$$\operatorname{Im} \mathbf{A} = \left\{ (f_1, ..., f_n) \left(\alpha_{i_1} A_{i_1} + ... + \alpha_{i_r} A_{i_r} \right), \quad \alpha_{i_k} \in \mathbb{R}, \, k = \overline{1, r} \right\}.$$

Приведем пример вычисления ядра и образа оператора, действующего из пространства L в себя. В этом случае базисы $\{e_1, ..., e_n\}$ и $\{f_1, ..., f_m\}$ совпадают.

Пример 13.2. Найти матрицу, ядро и образ оператора проектирования $\mathbf{P} : R^3 \to R^3$ на плоскость $\pi : y - z = 0$ (R^3- трехмерное пространство геометрических векторов).

Решение. Выберем в пространстве R^3 какой-нибудь базис (например, стандартный базис $\vec{i} = \{1, 0, 0\}, \vec{j} = \{0, 1, 0\}, \vec{k} = \{0, 0, 1\}$). В этом базисе матрица P оператора проектирования $\mathbf{P}$ находится из равенства $\left(\mathbf{P} \vec{i}, \mathbf{P} \vec{j}, \mathbf{P} \vec{k} \right) = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right) P$. Найдем образы базисных векторов. Так как плоскость π проходит через ось Ox, то $\mathbf{P} \vec{i} = \vec{i}$.

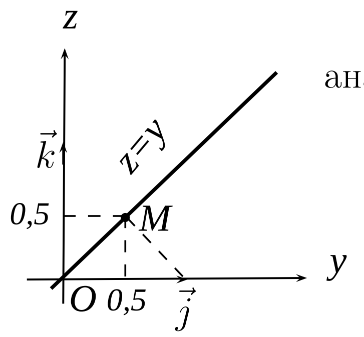

Рис. 13.1

Далее (рис. 13.1) $\mathbf{P} \vec{j} = \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \vec{j} + \frac{1}{2} \vec{k}$. И аналогично $\mathbf{P} \vec{k} = \frac{1}{2} \vec{j} + \frac{1}{2} \vec{k}$. Таким образом,

$$\left(\mathbf{P} \vec{i}, \mathbf{P} \vec{j}, \mathbf{P} \vec{k} \right) = \left(\vec{i}, \, \frac{1}{2} \vec{j} + \frac{1}{2} \vec{k}, \, \frac{1}{2} \vec{j} + \frac{1}{2} \vec{k} \right) =$$

$$= \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Значит, матрица P оператора $\mathbf{P}$ имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ядро оператора-матрицы P вычисляем из уравнения

$$Pw = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 0, \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0, \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 0, \\ y = -z \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -c_3 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Таким образом,

$$\mathrm{Ker}\,\mathbf{P} = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ -c_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = -c_3\vec{j} + c_3\vec{k}$$

(c_3 — произвольная постоянная).

Образ оператора-матрицы P натянут на все линейно независимые столбцы матрицы P, т.е.

$$\mathrm{Im}\,P = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \\ \gamma \end{pmatrix},$$

поэтому

$$\mathrm{Im}\,\mathbf{P} = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right) \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \alpha\vec{i} + \gamma\vec{j} + \gamma\vec{k}$$

(α, γ — произвольные постоянные).

13.3. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Матрица оператора в базисе из собственных векторов

Пусть дан линейный оператор $\mathbf{A} : L \to L$ (L — линейное пространство над числовом полем [4] K).

Определение 13.2. Вектор $x \in L$ называется *собственным вектором, соответствующим собственному значению* $\lambda \in K$, если: а) $x \neq 0$; б) $\mathbf{A}\,x = \lambda\,x$. Совокупность всех *различных собственных значений* оператора $\mathbf{A}$ называют *спектром* оператора $\mathbf{A}$. Обозначение: $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$.

[4] В качестве K обычно берут множество R действительных чисел или множество $\mathbb{C}$ комплексных чисел

Например, если $\mathbf{A}$ – матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, то вектор $x = \begin{pmatrix} \sqrt{3}-1 \\ 1 \end{pmatrix}$ является собственным вектором этого оператора, соответствующим собственному значению $\lambda = 2+\sqrt{3}$, так как $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3}-1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(2+\sqrt{3}\right)\begin{pmatrix} \sqrt{3}-1 \\ 1 \end{pmatrix}$. При этом $\sigma(\mathbf{A}) = \left\{2 \pm \sqrt{3}\right\}$.

Отметим очевидное свойство собственных векторов: *если $x \in L$ собственный вектор оператора $\mathbf{A}$, соответствующий собственному значению λ, то $C \cdot x$ $(C = \mathrm{const} \neq 0)$ – тоже собственный вектор оператора $\mathbf{A}$, соответствующий собственному значению λ.* В ряде случаев, выбирая постоянную C, можно упростить вид собственных векторов.

Свойства собственных векторов:

1^0) *собственные векторы x_1, x_2, соответствующие различным собственным значениям $\lambda_1 \neq \lambda_2$, линейно независимы;*

2^0) *все собственные векторы оператора $\mathbf{A}$, соответствующие одному и тому же собственному значению λ, образуют линейное подпространство в L (его называют собственным пространством оператора $\mathbf{A}$, отвечающим собственному значению λ);*

3^0) *в пространстве $\mathbb{C}^n = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x_j \in \mathbb{C}, j = \overline{1,n} \right\}$ любой линейный оператор имеет хотя бы один собственный вектор.*

Опишем теперь, как вычисляются собственные векторы и собственные значения. Зафиксируем в пространстве L некоторый базис $e_1, ..., e_n$ и вычислим матрицу A оператора $\mathbf{A}$ в этом базисе. Тогда операторное уравнение $\mathbf{A}\,x = \lambda x$ (с учетом того, что $x = (e_1, ..., e_n)\{x_1, ..., x_n\} \equiv x_1 e_1 + ... + x_n e_n \equiv (e_1, ..., e_n)\,\hat{x}$, где $\hat{x} = \{x_1, ..., x_n\}$) можно записать в матричном виде

$$A\hat{x} = \lambda\hat{x} \Leftrightarrow (A - \lambda E)\,\hat{x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1}-\lambda & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (13.4)$$

Эта система должна иметь нетривиальное решение $\hat{x} \neq 0$, поэтому ее определитель должен равняться нулю

$$\det (A - \lambda E)\, \hat{x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1}-\lambda & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0\,. \qquad (13.5)$$

Определитель (13.5) называется *характеристическим определителем матрицы* A *(или оператора* $\mathbf{A}$ *)*. Раскрывая его, получим так называемое *характеристическое уравнение* $\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + p_1\lambda + p_0 = 0$, решая которое, найдем собственные значения $\lambda = \lambda_j$ матрицы A (или оператора $\mathbf{A}$) . Положив в матрице (13.4) $\lambda = \lambda_j$ и решив полученную алгебраическую систему уравнений относительно вектор-столбца $\hat{x}$, найдем все собственные векторы $\hat{x} = \hat{x}_{jk}$, соответствующие собственному значению $\lambda = \lambda_j$ матрицы A. Затем по формуле $x = (e_1, ..., e_n)\, \hat{x}_{jk}$ вычислим собственные векторы оператора $\mathbf{A}$, соответствующие собственному значению $\lambda = \lambda_j$.

Зачем нужны собственные векторы? Оказывается они обладают следующим важным свойством.

Теорема 13.4. *Если оператор* $\mathbf{A} : L \to L$ *имеет в поле* K $n = \dim L$ *различных собственных значений* $\lambda_1, ..., \lambda_n$, *то собственные* *векторы $\varphi_1, ..., \varphi_n$, соответствующие этим значениям, образуют базис в L. Матрица A оператора $\mathbf{A}$ в этом базисе будет диагональной:*

$$(\mathbf{A}\,\varphi_1, ..., \mathbf{A}\,\varphi_n) = (\varphi_1, ..., \varphi_n)\,\Lambda \equiv (\varphi_1, ..., \varphi_n)\,\mathrm{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n) \equiv$$

$$\equiv (\varphi_1, ..., \varphi_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Замечание 13.3. Оператор $\mathbf{A} : L \to L$ называется *диагонализируемым (или оператором простой структуры),* если в L существует базис, в котором матрица A этого оператора *диагональна.* Из теоремы 13.4 следует, что оператор $\mathbf{A}$, имеющий в *в поле* K $n = \dim L$ различных собственных значений, диагонализируем. Обратное, вообще говоря, не верно: оператор $\mathbf{A}$ может быть диагонализируемым, не имея n различных собственных значений. Например, единичная матрица размерности n диагонализируема, но она имеет только одно собственное значение $\lambda = 1$ кратности n. В этом случае матрица имеет базис из собственных векторов, но все они отвечают собственному значению $\lambda = 1$.

Докажем теперь следующий важный результат.

Теорема 13.5. *Все подобные квадратные матрицы одной и той же размерности имеют одинаковый спектр.*

Доказательство. Пусть матрицы A и B подобны. Тогда существует невырожденная матрица T такая что $T^{-1}AT = B$. Поэтому $\lambda E - B = \lambda E - T^{-1}AT = T^{-1}\,(\lambda E - A)\,T$. Используя теорему об определителе произведения матриц, отсюда получаем, что

$$\det\ (\lambda E - B) = \det T^{-1} \cdot \det\ (\lambda E - B) \cdot \det T.$$

Учитывая, что $\det T \cdot \det T^{-1} = \det\left(TT^{-1}\right) = \det E = 1$, получаем отсюда равенство $\det\ (\lambda E - B) = \det\ (\lambda E - A)$, которое показывает, что характеристические уравнения матриц A и B совпадают, поэтому они имеют одинаковый спектр. Теорема доказана.

Лекция 14. Евклидовы и метрические пространства. Неравенство Коши—Буняковского. Существование ортонормированного базиса. Квадратичные формы и приведение их к каноническому виду

В теории квадратичных форм важную роль играют евклидовы пространства и самосопряжённый оператор. Перейдем к описанию этих понятий.

14.1. Евклидовы и метрические пространства

Пусть L – линейное пространство над множеством действительных чисел R.

Определение 14.1. Пространство L называется *евклидовым пространством*, если в нем для любой пары векторов x и y определено число (x, y), называемое *скалярным произведением* x *и* y, удовлетворяющее аксиомам [5]:

1. **П.О.** $(x, x) \geq 0$, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. **С.** $(x, y) = (y, x)$;
3. **Л.** $(x, \alpha y + \beta z) = \alpha (x, y) + \beta (x, z)$

(здесь $x, y, z \in L$ – произвольные векторы, $\alpha, \beta \in R$– произвольные числа).

Например, обычное скалярное произведение

$$(x, y) = |x| \cdot |y| \cos (x, ^\wedge y)$$

в геометрическом пространстве R^3 трехмерных векторов удовлетворяют свойствам 1–3, поэтому R^3 – евклидово пространство. Очевидно, что пространство $\mathbb{R}^n$ (n-мерных вектор-столбцов) также является евклидовым пространством со скалярным произведением

$$(x, y) \equiv (\{x_1, ..., x_n\}, \{y_1, ..., y_n\}) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$$

[5]Здесь: П.О – положительная определенность, С – симметричность, Л – линейность.

также является евклидовым пространством. Обычно евклидовы пространства обозначают буквой E и мы будем пользоваться этим обозначением.

Если L – линейное пространство над множеством комплексных чисел $\mathbb{C}$ и если в нем введено скалярное произведение $(x,y) \in \mathbb{C}$, удовлетворяющее аксиоме 1 и аксиомам:

$$2'). \quad (x,y) = \overline{(y,x)}; \quad 3'). \ (x, \alpha y + \beta z) = \bar{\alpha}\,(x,y) + \bar{\beta}\,(x,z)\,,$$

то пространство L называется *унитарным пространством* (здесь черта вверху означает комплексное сопряжение: $\overline{\sigma + i\tau} = \sigma - i\tau$). Мы будем рассматривать в основном евклидовы пространства. Однако все приводимые далее понятия и утверждения почти дословно переносятся и на унитарные пространства.

Определение 14.2. Два вектора $x, y \in E$ называются *ортогональными*, если $(x,y) = 0$.

Имеет место следующее утверждение: *любая система* $f_1, ..., f_n$ *попарно ортогональных векторов в* E *линейно независима.*

Действительно, пусть $\alpha_1 f_1 + ... + \alpha_n f_n = 0$. Умножая это равенство скалярно на f_j, будем иметь

$$\alpha_1\,(f_1, f_j) + ... + \alpha_j\,(f_j, f_j) + ... + \alpha_n\,(f_1, f_n) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_j\,(f_j, f_j) = 0 \Leftrightarrow \alpha_j = 0,\ j = \overline{1,n}.$$

Таким образом, равенство $\alpha_1 f_1 + ... + \alpha_n f_n = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда все числа α_j одновременно равны нулю. Это означает, что векторы $f_1, ..., f_n$ линейно независимы.

Определение 14.3. Базис $e_1, ..., e_n$ пространства E называется *ортонормированным,* если

$$(e_i, e_j) = \delta_{i,j} \equiv \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases} \ \left(i, j = \overline{1,n}\right).$$

Например, базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ в пространстве R^3 является ортонормированным.

Введем теперь в рассмотрение понятие метрического пространства.

Определение 14.4. Линейное пространство L называется *метрическим пространством*, если в нем для любых векторов x и y определено число $\rho(x,y)$, называемое *расстоянием между* x и y (или *метрикой* в L), обладающее следующими свойствами:

4. **П.О.** $\rho(x,x) \ge 0, \;\; \rho(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

5. **С.** $\rho(x,y) = \rho(y,x)\,;$

6. **Т.** $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$ $\big(x, y, z-$ произвольные векторы из пространства $L\big)$.

Любое евклидово пространство E *является одновременно и метрическим пространством с метрикой* $\rho(x,y) = \sqrt{(x-y,x-y)}$ (проверьте выполнение свойств 4–6). Заметим, что число $\rho(x,0) \equiv \|x\|$ называется *длиной* (или *нормой)* вектора x. Так что $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ в евклидовом пространстве E.

В любом евклидовом пространстве E имеет место *неравенство Коши—Буняковского:*

$$|(x,y)| \le \|x\| \cdot \|y\| \;\; (\forall x, y \in E)\,.$$

Отсюда следует, что имеет смысл выражение $\cos\varphi = \frac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|}$, называемое косинусом угла между векторами x и y.

Теорема 14.1. *В любом евклидовом пространстве E размерности n существует ортонормированный базис $e_1, ..., e_n$. Координаты x_i вектора $x \in E$ в этом базисе имеют вид*

$$x_i = (x, e_i)\,,\; i = \overline{1,n}.$$

Доказательство первой части этой теоремы проводить не будем. Перейдем ко второй части. Имеем $x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n$. Умножая скалярно это равенство на e_i, будем иметь

$$(x, e_i) = x_1(e_1, e_i) + ... + x_i(e_i, e_i) + ... + x_n(e_n, e_i) =$$

$$= x_1 \cdot 0 + ... + x_i \cdot 1 + ... + x_n \cdot 0 = x_i, \;\; i = \overline{1,n}.$$

Теорема доказана.

Введем следующее важное понятие.

Определение 14.5. Оператор $\mathbf{B} : L \to L$, действующий в унитарном (в частности, в евклидовом) пространстве L, называется *сопряженным* к оператору $\mathbf{A} : L \to L$, если для всех $x, y \in L$ имеет место равенство $(\mathbf{A}\,x, y) = (x, \mathbf{B}\,y)$. Обозначение: $\mathbf{B} = \mathbf{A}^*$.

Теорема 14.2. *В любом ортонормированном базисе* $e_1, ..., e_n$ *унитарного пространства* L *матрица оператора* $\mathbf{A}^*$ *является сопряженной по отношению к матрице оператора* $\mathbf{A}$, *т.е. если* A *– матрица оператора* $\mathbf{A}$, *то матрицей оператора* $\mathbf{A}^*$ *будет матрица* $A^* = \left(\overline{A}\right)^T$.

И, наконец, заметим, что квадратная матрица $A = (a_{ij})$ называется *симметрической, если* $A^T = A$, *т.е. если* $a_{ij} = a_{ji}$ $\left(i, j = \overline{1, n}\right)$. Нетрудно показать, *что все собственные значения симметрической матрицы действительны; при этом и отвечающие им собственные векторы также можно выбрать действительными.*

14.2. Ортогональные матрицы и ортогональные преобразования

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \equiv (A_1, ...A_n)$ (A_j – j-й столбец) называется *ортогональной*, если ее столбцы $A_1, ..., A_n$ образуют ортонормированную систему, т.е. $(A_i, A_j) = \delta_{ij}$, $i, j = \overline{1, n}$. Например, матрица $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ является ортогональной.

Теорема 14.3. *Для того чтобы матрица* A *была ортогональной, необходимо и достаточно, чтобы* $A^T A = E \Leftrightarrow A^{-1} = A^T$.

Следствие 14.1. *Ортогональная матрица* A *обладает следующими свойствами:*

1) $|\det A| = 1$; 2) *матрицы* A^T, A^{-1} *– ортогональные. Произведение двух ортогональных матриц есть ортогональная матрица. Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису является ортогональной матрицей.*

Определение 14.6. Линейное преобразование (оператор) $\mathbf{A}$: $E \to E$ *называется ортогональным*, если в некотором *ортонормированном базисе* $e_1, ..., e_n$ пространства E его матрица является *ортогональной.*

Теорема 14.4. *Имеют место следующие свойства ортогональных преобразований:*

1). преобразование $\mathbf{A} : E \to E$ *ортогонально тогда и только тогда, когда оно ортонормированный базис переводит в ортонормированный;*

2). ортогональное преобразование $\mathbf{A} : E \to E$ *не изменяет скалярного преобразования, т.е.* $(\mathbf{A}x, \mathbf{A}y) = (x, y)$ $(\forall x, y \in E)$;

3). при ортогональном преобразовании не изменяется длина (норма) вектора, а так же угол между векторами, т.е.

$$\|\mathbf{A}\,x\| = \|x\|\,,\ \frac{(\mathbf{A}\,x, \mathbf{A}\,y)}{\|\mathbf{A}\,x\| \cdot \|\mathbf{A}\,y\|} = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}\ \ (\forall x, y \in E)\,;$$

4). произведение двух ортогональных преобразований есть ортогональное преобразование.

14.3. Квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Квадратичной формой n *действительных переменных* называется выражение вида

$$f\,(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

где $a_{ij} = a_{ji}$ – числа (коэффициенты квадратичной формы). При этом матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется *матрицей квадратичной формы* (заметим, что она является симметрической: $a_{ij} = a_{ji}$.

Используя эту матрицу, можно записать квадратичную форму кратко так: $f(x_1, ..., x_n) = x^T Ax$, где $x = \{x_1, ..., x_n\}$ – вектор-столбец. Определитель матрицы A и её ранг называются соответственно *определителем и рангом квадратичной формы.*

Посмотрим, как преобразуется квадратичная форма при линейном преобразовании. Пусть дана квадратичная форма $f(x_1, ..., x_n) = x^T Ax$. Сделаем в ней преобразование $x = By$; будем иметь

$$g(y_1, ..., y_n) = (By)^T A (By) = y^T \left(B^T AB\right) y.$$

Если матрица B является невырожденной, то матрицы A и $C = B^T AB$ называются *конгруэнтыми.* Так же называются и соответствующие квадратичные формы. Нетрудно показать, что определители *конгруэнтных матриц имеют одинаковые знаки, а сами конгруэнтные матрицы имеют одинаковые ранги.*

Теорема 14.5. *Любую действительную квадратичную форму $f(x_1, ..., x_n) = x^T Ax$ ортогональным линейным преобразованием $x = By$ можно привести к каноническому виду*

$$g(y_1, ..., y_n) = y^T \left(B^T AB\right) y = \lambda_1 y_1^2 + ... + \lambda_n y_n^2.$$

При этом $\lambda_1, ..., \lambda_n$ – собственные значения матрицы A, столбцы $B_1, ..., B_n$ матрицы B являются собственными векторами матрицы A, соответствующими этим собственным значениям, причем они образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Теорема 14.6. *Любую действительную квадратичную форму $f(x_1, ..., x_n) = x^T Ax$ можно линейным невырожденным преобразованием $x = Dz$* привести *к нормальному виду*[6]

$$p(z_1, ..., z_n) = z_1^2 + ... + z_{k-1}^2 - z_k^2 - ... - z_r^2, \qquad (14.1)$$

где r– ранг квадратичной формы. При этом число положительных и число отрицательных квадратов в ehfdytybb(14.1) не зависит от выбора преобразования (закон инерции квадратичных форм).

[6]Приведение квадратичной формы к виду (14.1) называют ещё приведением её к главным осям

Следствие 14.2. *Любая действительная симметрическая матрица A ортогонально-подобна диагональной матрице, т.е. $A = T^{-1}\Lambda T$, где $T-$ ортогональная матрица, $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. При этом $\{\lambda_j\} = \sigma(A) -$ спектр матрицы A, а столбцы $T_1, ..., T_n$ являются собственными векторами матрицы A.*

Заметим, что канонический и нормальный вид квадратичной формы определяются неоднозначно. Однако число положительных и число отрицательных квадратов во всех видах остаются неизменными (*закон инерции квадратичных форм*).

Пример 14.1. Привести к каноническому и нормальному виду квадратичную форму

$$f = 5x_1^2 + 4\sqrt{6}x_1x_2 + 7x_2^2.$$

Решение. Квадратичную форму можно записать в виде

$$f = x^TAx \equiv (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 5 & 2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Находим собственные значения матрицы A :

$$\begin{vmatrix} \lambda - 5 & 2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} & \lambda - 7 \end{vmatrix} = 11 - 12\lambda + \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 11.$$

Вычисляем собственные векторы матрицы A, для чего решаем систему $\begin{pmatrix} \lambda - 5 & 2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} & \lambda - 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ при $\lambda = 1, \lambda = 11$. Получим собственные векторы

$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{6} \\ -2 \end{bmatrix}, \varphi_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{6} \\ 3 \end{bmatrix},$$

образующие базис в $E = \mathbb{R}^2$. Он является ортогональным базисом в $E = \mathbb{R}^2$, но не ортонормированным. Нормируем собственные векторы, поделив их на их длины:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} \sqrt{6} \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3}{5}} \\ -\sqrt{\frac{2}{5}} \end{bmatrix}, e_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{bmatrix} \sqrt{6} \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{5}} \\ \sqrt{\frac{3}{5}} \end{bmatrix}.$$

Теперь преобразующая матрица T и ее обратная имеют вид

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{5}} & \sqrt{\frac{2}{5}} \\ -\sqrt{\frac{2}{5}} & \sqrt{\frac{3}{5}} \end{pmatrix}, \, T^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{5}} & -\sqrt{\frac{2}{5}} \\ \sqrt{\frac{2}{5}} & \sqrt{\frac{3}{5}} \end{pmatrix} = T'.$$

Следовательно, преобразование $x = Ty$ приводит исходную квадратичную форму к каноническому виду $f = y_1^2 + 11y_2^2$. Сделав еще одно преобразование $y_1 = z_1$, $y_2 = \sqrt{11^{-1}} \cdot z_2$, приведем квадратичную форму к нормальному виду $f = z_1^2 + z_2^2$.

Дадим еще один способ приведения квадратичной формы к нормальному виду, называемый *методом Лагранжа.* Продемонстрируем его на том же примере $f = 5x_1^2 + 4\sqrt{6}x_1x_2 + 7x_2^2$. Назовем *главной переменной* ту, которая входит в квадратичную форму в квадрате и в первой степени.

Это переменная x_1. Выделяем по ней полный квадрат:

$$f = 5\left(x_1^2 + 2 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5}x_1x_2 + \left(\frac{2\sqrt{6}}{5}x_2\right)^2\right) - 5\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}x_2\right)^2 + 7x_2^2 =$$

$$= 5\left(x_1 + \left(\frac{2\sqrt{6}}{5}x_2\right)\right)^2 + \frac{11}{5}x_2^2.$$

Делаем замены переменных: $\sqrt{5}\left(x_1 + \frac{2\sqrt{6}}{5}x_2\right) = y_1$, $\sqrt{\frac{11}{5}}x_2 = y_2$. Будем иметь $f = y_1^2 + y_2^2$. Это и есть нормальный вид квадратичной формы. Чтобы найти преобразование $x = By$, приводящее квадратичную форму f к нормальной форме, найдем обратную замену переменных:

$$x_1 = -\frac{1}{55}\sqrt{5}\left(2\sqrt{6}\sqrt{11}y_2 - 11y_1\right), x_2 = \frac{1}{11}\sqrt{55}y_2 \Leftrightarrow x_1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}y_1 - 2\sqrt{\frac{6}{55}}y_2, \; x_2 = \sqrt{\frac{5}{11}}y_2.$$

Следовательно, матрица преобразования к нормальному виду будет такой:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -2\sqrt{\frac{6}{55}} \\ 0 & \sqrt{\frac{5}{11}} \end{pmatrix}.$$

Действительно, $\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} B^T \begin{pmatrix} 5 & 2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} & 7 \end{pmatrix} B \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = y_1^2 + y_2^2$.

14.4. Кривые второго порядка на плоскости

Множество точек (x, y) на плоскости[7] xOy, удовлетворяющих уравнению

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{14.2}$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} не обращаются в нуль одновременно, называется кривой второго порядка на плоскости. Старшие члены в ehfdytybb(14.2) образуют действительную квадратичную форму $(a_{12} = a_{21})$

$$f(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{14.3}$$

с матрицей $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. По теореме 14.4 ортогональным преобразованием $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ (где $B = (B_1, B_2)$ – матрица из ортонормированных собственных векторов B_1, B_2 матрицы A) ее можно привести к каноническому виду

$$f = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} B^T A B \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \equiv \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2,$$

где λ_1, λ_2 – собственные значения матрицы A. При этом преобразовании исходное уравнение (14.2) приводится к виду

$$\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + 2cu + 2dv + e = 0. \tag{14.4}$$

[7]Эту плоскость мы будем обозначать так же, как и множество геометрических векторов, буквой R^2 .

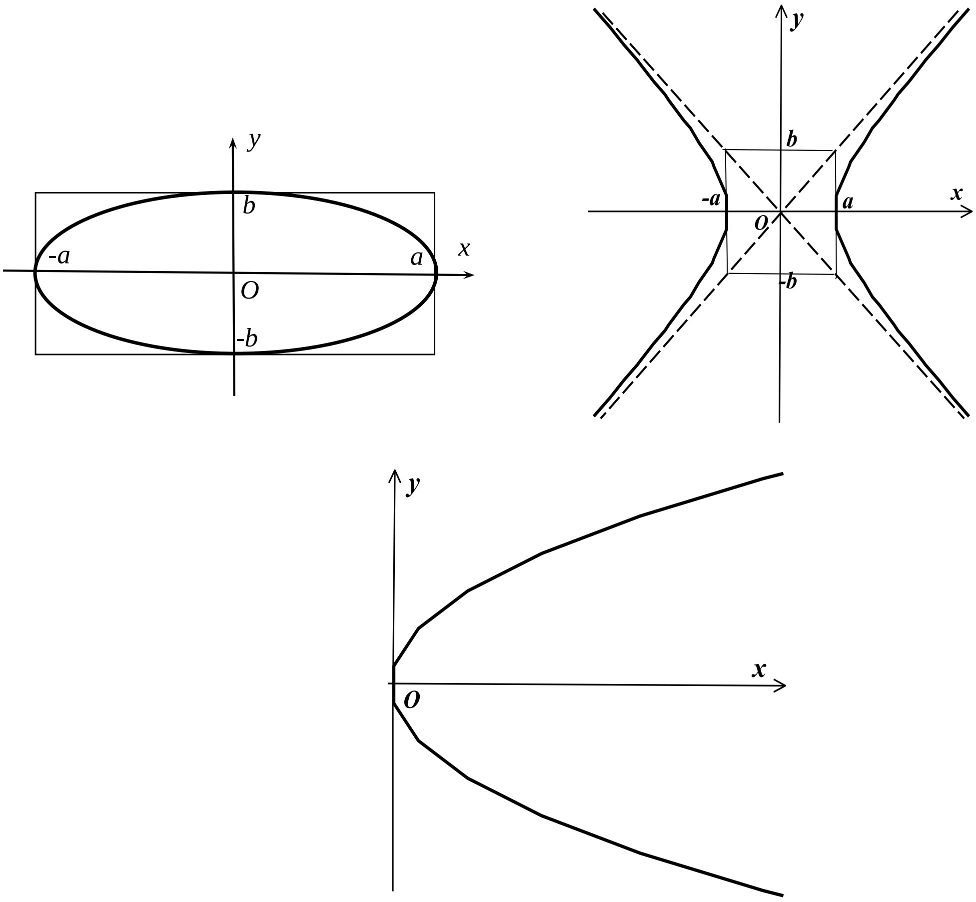

Рис. 14.1

Применяя метод выделения полного квадрата Лагранжа, можно преобразовать (мы не будем это делать) уравнение (14.4) к одной из следующих форм (ради удобства записываем эти уравнения в терминах исходных переменных x и y):

1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (*эллипс с полуосями* a *и* b; первый слева рис. 14.1),

2. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (гипербола с *полуосями* a *и* b; первый справа рис. 14.1),

3. $y^2=2px$ (парабола; второй в центре рис. 14.1).

14.5. Поверхности второго порядка. Метод сечений

К сожалению, подробное изучение поверхностей второго порядка довольно трудоёмко. Их уравнения также могут приведены к каноническому виду с помощью ортогональных преобразований и последующим применением метода Лагранжа. Канонические уравнения поверхностей и их рисунки приведении в таблице (14.1).

Опишем метод исследования поверхностей, называемый *методом сечений*, позволяющий изучить структуру поверхности по ее уравнению. Суть этого метода состоит в том, что одну из переменной в уравнении поверхности фиксируют (например, z считают постоянной) и затем смотрят, какая кривая второго порядка получилась в сечении $z = \text{const}$. Рассмотрим, например, уравнение двуполостного гиперболоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} = -1$. Зафиксируем здесь переменную z $(z = \text{const})$. После преобразований получим следующее уравнение:

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{z_0^2}{c^2}-1}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{z_0^2}{c^2}-1}\right)^2}=1.$$

Это уравнение есть уравнение эллипса в плоскости $z = z_0 = \text{const}$ с полуосями $a\sqrt{\frac{z_0^2}{c^2}-1}$ и $b\sqrt{\frac{z_0^2}{c^2}-1}$, причем $|z_0| \geq |c|$ (т. е. все эллипсы должны быть расположены выше плоскости $z = c$ и ниже плоскости $z = -c$). Если же в уравнении гиперболоида зафиксировать переменную y $(y = \text{const})$, то в сечении $y = y_0 = \text{const}$ получим гиперболу

$$\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1+\frac{y_0^2}{b^2}}\right)^2}-\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\frac{y_0^2}{b^2}}\right)^2}=1.$$

Поступая точно так же с переменной x, видим, что и в сечениях $x = x_0 = \text{const}$ получаются гиперболы

$$\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1+\frac{x_0^2}{a^2}}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\frac{x_0^2}{a^2}}\right)^2}=1.$$

При непрерывном изменении постоянных x_0, y_0, z_0 $(|z_0| \geq c)$, совокуп- ность полученных сечений образует поверхность, изображенную на рис. 14.2.

Для усвоения изложенной теории рекомендуем выполнить задачи из типового расчета «Линейная алгебра,» помещённого в конце пособия.

§5. Аналитическая геометрия. Задачи

Задача 1. Написать разложение последнего вектора-столбца $\vec{x}$ матрицы A по её первым трём столбцам $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$. Ответ записать в виде $\vec{x} = \alpha\vec{p} + \beta\vec{q} + \gamma\vec{r}$.

1.1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

1.2. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

1.3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

1.4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

1.5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

1.6. $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

1.7. $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

1.8. $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

1.9. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

1.10. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

1.11. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

1.12. $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 & -2 \\ -4 & 1 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

1.13. $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

1.14. $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

1.15. $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

1.16. $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 5 & 1 \\ 7 & 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$.

1.17. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. 1.24. $A = \begin{bmatrix} 9 & 10 & 8 & 9 \\ 3 & 8 & 10 & 6 \\ 12 & 7 & 10 & 9 \end{bmatrix}$.

1.18. $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 & 5 \\ -1 & 4 & 6 & 2 \\ 8 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$. 1.25. $A = \begin{bmatrix} -5 & -4 & -6 & -5 \\ -11 & -6 & -4 & -8 \\ -2 & -7 & -4 & -5 \end{bmatrix}$.

1.19. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -6 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. 1.26. $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

1.20. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & -1 \\ -7 & -2 & 0 & -4 \\ 2 & -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. 1.27. $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 3 & 5 \\ -7 & 3 & 7 & -1 \\ 11 & 1 & 7 & 5 \end{bmatrix}$.

1.21. $A = \begin{bmatrix} -6 & -5 & -7 & -6 \\ -12 & -7 & -5 & -9 \\ -3 & -8 & -5 & -6 \end{bmatrix}$. 1.28. $A = \begin{bmatrix} -3 & -5 & -1 & -3 \\ 9 & -1 & -5 & 3 \\ -9 & 1 & -5 & -3 \end{bmatrix}$.

1.22. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & -1 \\ -7 & -2 & 0 & -4 \\ 2 & -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. 1.29. $A = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 4 & 7 \\ -11 & 4 & 10 & -2 \\ 16 & 1 & 10 & 7 \end{bmatrix}$.

1.23. $A = \begin{bmatrix} -16 & -15 & -17 & -16 \\ -22 & -17 & -15 & -19 \\ -13 & -18 & -15 & -16 \end{bmatrix}$.1.30. $A = \begin{bmatrix} -5 & -8 & -2 & -5 \\ 13 & -2 & -8 & 4 \\ -14 & 1 & -8 & -5 \end{bmatrix}$.

Ответы. **1.16.** $\frac{13}{34}\vec{p} + \frac{15}{34}\vec{q} + \frac{3}{34}\vec{r}$. **1.17.** $\frac{7}{19}\vec{p} + \frac{6}{19}\vec{q} - \frac{3}{38}\vec{r}$. **1.18.** $\frac{41}{107}\vec{p} + \frac{48}{107}\vec{q} + \frac{21}{214}\vec{r}$. **1.19.** $\frac{1}{2}\vec{p} + \frac{3}{2}\vec{q} + \frac{3}{2}\vec{r}$. **1.20.** $\frac{2}{5}\vec{p} + \frac{3}{5}\vec{q} + \frac{3}{10}\vec{r}$.

Задача 2.Найти а) косинус угла между векторами $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{PR}$; б) вычислить площадь треугольника PQR.

2.1. $P\,(1,2,1)\,,\;\; Q\,(2,2,-1)\,,\;\; R\,(-1,4,1)$.

2.2. $P\,(-1,2,0)\,,\;\; Q\,(-2,2,0)\,,\;\; R\,(1,4,0)$.

2.3. $P(-1,-3,0)$, $Q(-2,-3,0)$, $R(1,-6,0)$.
2.4. $P(1,3,0)$, $Q(2,3,0)$, $R(-1,6,0)$.
2.5. $P(2,3,1)$, $Q(4,3,-1)$, $R(-2,6,1)$.
2.6. $P(-2,3,-1)$, $Q(-4,3,1)$, $R(2,6,-1)$.
2.7. $P(0,3,-1)$, $Q(0,3,1)$, $R(0,6,-1)$.
2.8. $P(0,3,-2)$, $Q(0,3,2)$, $R(0,6,-2)$.
2.9. $P(1,3,-2)$, $Q(2,3,2)$, $R(-1,6,-2)$.
2.10. $P(1,5,-2)$, $Q(2,5,2)$, $R(-1,10,-2)$.
2.11. $P(0,5,-2)$, $Q(0,5,2)$, $R(0,10,-2)$.
2.12. $P(2,5,-2)$, $Q(4,5,2)$, $R(-2,10,-2)$.
2.13. $P(-2,3,-2)$, $Q(-4,3,2)$, $R(2,6,-2)$.
2.14. $P(-4,3,-2)$ $Q(-8,3,2)$ $R(4,6,-2)$.
2.15. $P(-1,3,-4)$, $Q(-2,3,4)$, $R(1,6,-4)$.
2.16. $P(5,5,-3)$, $Q(10,5,3)$, $R(-5,10,-3)$.
2.17. $P(-1,5,-3)$, $Q(-2,5,3)$, $R(1,10,-3)$.
2.18. $P(-1,4,-3)$, $Q(-2,4,3)$, $R(1,8,-3)$.
2.19. $P(-2,0,4)$, $Q(-4,0,-4)$, $R(2,0,4)$.
2.20. $P(-2,-1,4)$, $Q(-4,-1,-4)$, $R(2,-2,4)$.
2.21. $P(-1,4,3)$, $Q(-2,4,-3)$, $R(1,8,3)$.
2.22. $P(1,-4,-3)$, $Q(2,-4,3)$, $R(-1,-8,-3)$.
2.23. $P(1,-5,-3)$, $Q(2,-5,3)$, $R(-1,-10,-3)$.
2.24. $P(2,-5,-3)$, $Q(4,-5,3)$, $R(-2,-10,-3)$.
2.25. $P(-5,-3,8)$, $Q(-10,-3,-8)$, $R(5,-6,8)$.
2.26. $P=(-1,4,-1)$, $Q=(-2,4,1)$, $R=(1,8,-1)$.
2.27. $P=(-1,4,-2)$, $Q=(-2,4,2)$, $R=(1,8,-2)$.
2.28. $P=(-1,4,-3)$, $Q=(-2,4,3)$, $R=(1,8,-3)$.
2.29. $P=(-1,4,-4)$, $Q=(-2,4,4)$, $R=(1,8,-4)$.
2.30. $P=(-1,4,-5)$, $Q=(-2,4,5)$, $R=(1,8,-5)$.

Ответы. **2.16.** $\pi-\arccos\left(\frac{2}{61}\sqrt{61}\sqrt{5}\right);\frac{5}{2}\sqrt{5}\sqrt{41}$.
2.17. $\pi-\arccos\left(\frac{2}{1073}\sqrt{37}\sqrt{29}\right);\frac{1}{2}\sqrt{1069}$.
2.18. $\pi-\arccos\left(\frac{1}{185}\sqrt{37}\sqrt{5}\right);2\sqrt{46}$.
2.19. $\pi-\arccos\left(\frac{1}{17}\sqrt{17}\right);16$.

2.20. $\pi - \arccos\left(\frac{4}{17}\right)$; $\sqrt{273}$.

Задача 3. Используя результаты решения предыдущей задачи, вычислить объем пирамиды с вершинами в указанных ниже точках и найти параметрические уравнения её высоты, опущенной из вершины M на грань PQR .

3.1. $P(1,2,1)$, $Q(2,2,-1)$, $R(-1,4,1)$, $M(1,3,5)$.
3.2. $P(-1,2,0)$, $Q(-2,2,0)$, $R(1,4,0)$, $M(1,-5,1)$.
3.3. $P(-1,-3,0)$, $Q(-2,-3,0)$, $R(1,-6,0)$, $M(1,0,3)$.
3.4. $P(1,3,0)$, $Q(2,3,0)$, $R(-1,6,0)$, $M(3,-1,5)$.
3.5. $P(2,3,1)$, $Q(4,3,-1)$, $R=(-2,6,1)$, $M(-1,3,0)$.
3.6. $P(-2,3,-1)$, $Q(-4,3,1)$, $R(2,6,-1)$, $M(3,5,-1)$.
3.7. $P(0,3,-1)$, $Q(0,3,1)$, $R(0,6,-1)$, $M(-5,2,3)$.
3.8. $P(0,3,-2)$, $Q(0,3,2)$, $R(0,6,-2)$, $M(1,-7,1)$.
3.9. $P(1,3,-2)$, $Q(2,3,2)$, $R(-1,6,-2)$, $M(3,-6,1)$.
3.10. $P(1,5,-2)$, $Q(2,5,2)$, $R(-1,10,-2)$, $M(-3,0,5)$.
3.11. $P(0,5,-2)$, $Q(0,5,2)$, $R(0,10,-2)$, $M(4,-5,1)$.
3.12. $P(2,5,-2)$, $Q(4,5,2)$, $R(-2,10,-2)$, $M(-2,3,5)$.
3.13. $P(-2,3,-2)$, $Q(-4,3,2)$, $R(2,6,-2)$, $M(4,1,-2)$.
3.14. $P(-4,3,-2)$ $Q(-8,3,2)$ $R(4,6,-2)$, $M(0,3,1)$.
3.15. $P(-1,3,-4)$, $Q(-2,3,4)$, $R(1,6,-4)$, $M(0,0,1)$.
3.16. $P=(5,5,-3)$, $Q=(10,5,3)$, $R=(-5,10,-3)$, $M(-1,3,2)$.
3.17. $P=(-1,5,-3)$, $Q=(-2,5,3)$, $R=(1,10,-3)$, $M(1,-3,4)$.
3.18. $P=(-1,4,-3)$, $Q=(-2,4,3)$, $R=(1,8,-3)$, $M(0,-2,3)$.
3.19. $P=(-2,0,4)$, $Q=(-4,0,-4)$, $R=(2,0,4)$, $M(1,1,2)$.
3.20. $P=(-2,-1,4)$, $Q=(-4,-1,-4)$, $R=(2,-2,4)$, $M(0,5,-1)$.
3.21. $P(-1,4,3)$, $Q(-2,4,-3)$, $R(1,8,3)$, $M(3,-1,5)$.
3.22. $P(1,-4,-3)$, $Q(2,-4,3)$, $R(-1,-8,-3)$, $M(0,-1,2)$.
3.23. $P(1,-5,-3)$, $Q=(2,-5,3)$, $R=(-1,-10,-3)$, $M(-1,0,-2)$.
3.24. $P(2,-5,-3)$, $Q(4,-5,3)$, $R(-2,-10,-3)$, $M(-2,5,0)$.
3.25. $P(-5,-3,8)$, $Q(-10,-3,-8)$, $R(5,-6,8)$, $M(1,-1,2)]$.
3.26. $P=(-1,4,-1)$, $Q=(-2,4,1)$, $R=(1,8,-1)$, $M(0,-1,2)$.
3.27. $P=(-1,4,-2)$, $Q=(-2,4,2)$, $R=(1,8,-2)$, $M(1,0,-3)$.

3.28. $P = (-1, 4, -3)\,, \quad Q = (-2, 4, 3)\,, \quad R = (1, 8, -3)\,, \quad M\,(0, -2, 5)\,.$
3.29. $P = (-1, 4, -4)\,, \quad Q = (-2, 4, 4)\,, \quad R = (1, 8, -4)\,, \quad M\,(1, -3, 5)\,.$
3.30. $P = (-1, 4, -5)\,, \quad Q = (-2, 4, 5)\,, \quad R = (1, 8, -5)\,, \quad M\,(1, -3, 0)\,.$

Ответы. **3.16.** $V = \frac{425}{6}$; $x = -1 - 30\,t, y = 3 - 60\,t, z = 2 + 25\,t.$
3.17. $V = \frac{191}{6}$; $x = 1 - 30\,t, y = -3 + 12\,t, z = 4 - 5\,t.$
3.18. $V = 20, ;$ $x = -24\,t, y = -2 + 12\,t, z = 3 - 4\,t.$
3.19. $V = \frac{16}{3}$; $x = 1, y = 1 - 32\,t, z = 2.$
3.20. $V = \frac{109}{3}$; $x = -8\,t, y = 5 - 32\,t, z = -1 + 2\,t.$

Задача 4. Найти угол между плоскостями.
4.1. $-\,2x + 2y + 2z - 1 = 0, \quad -x + 2z - 1 = 0.$
4.2. $-\,2x + 2y + 2z + 9 = 0, \quad -x - y + 6z - 1 = 0.$
4.3. $-\,3x + 2y - 6z - 1 = 0, \quad -x + y + 2z - 7 = 0.$
4.4. $-\,3x - 2y + 6z + 23 = 0, \quad y + 2z + 5 = 0.$
4.5. $-\,x + y + 6z - 7 = 0, \quad y + 2z - 1 = 0.$
4.6. $-\,x + 2y + 6z - 5 = 0, \quad y + 2z - 1 = 0.$
4.7. $-\,x + 2y + 6z - 5 = 0, \quad y + 2z - 1 = 0.$
4.8. $-\,2x + 2y + 2z + 9 = 0, \quad -x - y + 6z - 1 = 0.$
4.9. $-\,x + 4y - 1 = 0, \quad -x + 2y + 16 = 0.$
4.10. $-\,3x + 4y - 1 = 0, \quad -3x + 2y + 16 = 0.$
4.11. $-\,x + z - 1 = 0 \quad -\,2x + 4y + z + 9 = 0.$
4.12. $-\,3x + 2y + 3z - 7 = 0, \quad 2y + z - 1 = 0.$
4.13. $-\,x + 2y + 3z - 7 = 0, \quad 2y + z - 1 = 0. =$
4.14.$x + 3y + 5 = 0, \quad 2x + y + 10z - 16 = 0.$
4.15.$x + 3y + 2z - 1 = 0, \quad x + 2z - 1 = 0.$
4.16. $x + 4y + 5 = 0, \quad 2x + 3y + 10z - 66 = 0\ .$
4.17. $x + 5y + 5 = 0, \quad x + 5z - 3 = 0.$
4.18. $2x + 8y + 5 = 0, \quad 4x + y + 10z - 6 = 0.$
4.19. $2x + 14y + 5 = 0, \quad 4x + 3y + 10z - 26 = 0.$
4.20. $2x + 14y + z + 5 = 0, \quad 4x + y + 10z - 1 = 0.$
4.21. $x + 3\,y - 6\,z + 5 = 0, \quad 2\,x + y + 8\,z - 16 = 0.$
4.22. $3x + 3y - 6\,z + 5 = 0, \quad 6\,x + y + 8\,z - 16 = 0.$

4.23. $5x+3y+6z+5=0, \quad 10\,x+y+12\,z-16=0.$

4.24. $-\,4\,x+y+13\,z-16=0, \quad -2\,x+3\,y+9\,z+5=0.$

4.25. $-\,10\,x+y+18\,z-16=0, \quad -5\,x+3\,y+24\,z+5=0.$

4.26. $x-z+9y+5=0, \quad 2x+18z+3y-26=0.$

4.27. $x-2z+6y+5=0, \quad 2x+26z+2y+4=0.$

4.28. $x+5z-9y+8=0, \quad 2x-10z-3y-45=0.$

4.29. $3x-z+9y+5=0, \quad 6x+18z+3y+34=0.$

4.30. $3x-2z+9y+5=0, \quad 6x+16z+3y+54=0.$

Ответы. **4.16.** $\arccos\left(\frac{14}{1921}\sqrt{17}\sqrt{113}\right)$. **4.17.** $\arccos\left(\frac{1}{26}\right)$. **4.18**. $\arccos\left(\frac{8}{663}\sqrt{17}\sqrt{13}\right)$. **4.19.** $\arccos\left(\frac{1}{10}\sqrt{2}\sqrt{5}\right)$. **4.20.** $\arccos\left(\frac{32}{7839}\sqrt{201}\sqrt{13}\right)$.

Задача 5. Написать канонические уравнения прямой.

5.1. $-\,x+2y-2z-2=0, \quad -x-2y+z+2=0.$

5.2. $-\,x+10y-z+11=0, \quad -x-2y+2z-1=0.$

5.3. $-\,x-2y+z-2=0, \quad -x-4y-z+4=0.$

5.4. $-\,x+10y+2z-5=0, \quad -2x-10y-z+5=0.$

5.5. $-\,2x+6y-2z+6=0, \quad -x-6y+z+3=0.$

5.6. $-\,6x-10y+3z+8=0, \quad -6x+10y-4z+4=0.$

5.7. $-\,2x-6y-2z+6=0, \quad -x-6y+z+3=0.$

5.8. $2x-y-2z-2=0,2 \quad x+y+z+2=0.$

5.9. $2x-5y-z+11=0, \quad 2x+y+2z-1=0.$

5.10. $2x+y+z-2=0, \quad 2x+2y-z+4=0.$

5.11. $2x-5y+2z-5=0, \quad 4x+5y-z+5=0.$

5.12. $2x+3y+z+2=0, \quad 2x-3y+2z+14=0.$

5.13. $4x-3y-2z+6=0, \quad 2x+3y+z+3=0.$

5.14. $12x+5y+3z+8=0, \quad 12x-5y-4z+4=0.$

5.15. $4x+3y-2z+6=0, \quad 2x+3y+z+3=0.$

5.16. $x-4y-2z-2=0, \quad x+4y+z+3=0.$

5.17. $x-4y+z+7=0, \quad x+4y-2\,z-10=0.$

5.18. $x-6\,y+5\,z+4=0, \quad x+6\,y-10\,z-4=0.$

5.19. $2x-6\,y+z+4=0, \quad 2\,x+6\,y-2\,z-5=0.$

5.20. $3x-2y+z+5=0, \quad 3x+2y-2\,z-6=0.$

5.21 .$2x - 6\,y + 3\,z + 3 = 0, \quad x + 3\,y - 2\,z - 1 = 0.$

5.22. $3x - 6y + 5z + 3 = 0, \quad 3x + 6y - 6z - 2 = 0.$

5.23. $-2\,x - 10\,y + 15\,z + 3 = 0, \quad x - 5\,y + 8\,z + 1 = 0.$

5.24. $6x - 16\,y + 3\,z + 3 = 0, \quad 3\,x + 8\,y - 2\,z - 1 = 0.$

5.25. $7x - 16y + 7z + 3 = 0, \quad 7x + 16y - 10z - 2 = 0.$

5.26. $x + 4y + 5 = 0, \quad 2x + 3y + 10z - 66 = 0$.

5.27. $x + 5y + 5 = 0, \quad x + 5z - 3 = 0.$

5.28. $2x + 8y + 5 = 0, \quad 4x + y + 10z - 6 = 0.$

5.29. $2x + 14y + 5 = 0, \quad 4x + 3y + 10z - 26 = 0.$

5.30. $2x + 14y + z + 5 = 0, \quad 4x + y + 10z - 1 = 0.$

Ответы. **5.16.** $\left\{x = -\frac{1}{2} + 4t, y = -\frac{5}{8} - 3t, z = 8t\right\}$.
5.17. $\left\{x = \frac{3}{2} + 4t, y = \frac{17}{8} + 3t, z = 8t\right\}$.
5.18. $\left\{x = 10t, y = \frac{2}{3} + 5t, z = 4t\right\}$.
5.19. $\left\{x = \frac{1}{4} + t, y = \frac{3}{4} + t, z = 4t\right\}$.
5.20. $\left\{x = \frac{1}{6} + 2t, y = \frac{11}{4} + 9t, z = 12t\right\}$.

Задача 6. Найти точку пересечения прямой и плоскости [8].

6.1. $\frac{-x+1}{11} = \frac{y+2}{2} = \frac{-z+3}{2}, x + y - 5z + 1 = 0.$

6.2. $\frac{-x+1}{7} = \frac{y+2}{2} = \frac{-z+3}{2}, \quad x - y - 5z + 1 = 0.$

6.3. $\frac{-x+1}{9} = \frac{y+2}{2} = \frac{-z+3}{2}, \quad x + 1 - 5z = 0.$

6.4. $\frac{-x+1}{7} = \frac{y+2}{1} = \frac{-z+3}{2}, \quad x - 2y - 5z + 1 = 0.$

6.5. $\frac{-x+1}{12} = \frac{y+2}{1} = \frac{-z+3}{2}, \; x + 3\,y - 5\,z + 1 = 0.$

6.6. $\frac{-x+1}{6} = \frac{y+2}{3} = \frac{-z+3}{2}, \; x - y - 5\,z + 1 = 0.$

6.7. $\frac{-x+1}{9} = \frac{y+2}{3} = \frac{-z+3}{2}, \quad x + 1 - 5z = 0.$

6.8. $\frac{-x+1}{3} = \frac{-y-2}{2} = \frac{-z+3}{2}, \; x + 3y - 5z + 3 = 0.$

6.9. $\frac{x}{-3} = \frac{y+2}{2} = \frac{-z+3}{2}, \; x + 8 + 3y - 5z = 0.$

6.10. $\frac{x+2}{-3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{2}, \quad x + 10 + 3y + 5z = 0.$

6.11. $\frac{x+1}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{2}, x + 3y + 3 + 5z = 0.$

6.12. $\frac{x+2}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{2}, \; x + 1 + 3y + 5z = 0$.

6.13. $\frac{x+3}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}z, \quad x - 23 + 3y - 5z = 0.$

[8] Если уравнение прямой не записано в стандартном виде $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$, то сделайте это.

6.14. $\frac{-x+1}{3}=\frac{y+8}{2}=-\frac{-z+8}{2},\quad x+50+3y-5z=0.$
6.15. $-\frac{x+8}{3}x=\frac{y-4}{2}=-\frac{z+1}{2},\ x-27+3y-5z=0$.
6.16. $\frac{-2x+1}{9}=\frac{y+2}{3}=\frac{-z+3}{2}, 2x+1-5\ z=0.$
6.17. $\frac{-x+1}{9}=\frac{-2y+2}{3}=\frac{-z+3}{2}, x+1-5\ z=0.$
6.18. $\frac{-3x+1}{9}=\frac{-2y+2}{3}=\frac{-2z+3}{2}, 3x+1-10z=0.$
6.19. $\frac{-x+1}{9}=\frac{3y+2}{3}=\frac{-2z+3}{2},\ x+1-10\ z=0.$
6.20. $\frac{-x+1}{9}=\frac{5y+2}{3}=\frac{2z+3}{2},\ x+1+10z=0.$
6.21. $2\ x-3\ y+5\ z=1,\quad x=-1+3\cdot t, y=2+5\cdot t, z=-3+t.$
6.22. $6x-3\ y+2\ z=1,\quad x=-1+3t, y=2-t, z=-3+2\ t.$
6.23. $4x-3\ y-10\ z=1,\quad x=-1+3t, y=2+t, z=-3+4\ t.$
6.24. $10x-3\ y+25\ z=1,\quad x=-1-3t, y=2-t, z=-3+5\ t.$
6.25. $8x-3\ y+34\ z=1,\quad x=-1-3t, y=2+t, z=-3-9\ t.$
6.26. $-\frac{x}{3}+\frac{1}{9}=\frac{7}{3}-\frac{y}{3}=z+\frac{3}{2},\quad 3x+1+10z=0.$
6.27. $-\frac{5x}{9}+\frac{1}{9}=\frac{11}{3}-\frac{y}{3}=z+\frac{3}{2},\quad 5x+1+10z=0.$
6.28. $\frac{x}{3}+\frac{1}{9}=4-\frac{y}{3}=z+\frac{3}{2},\quad -3x+1+10z=0.$
6.29. $\frac{7x}{9}+\frac{1}{9}=\frac{7}{3}-\frac{y}{3}=-z+\frac{3}{2},\quad -7x+1-10z=0.$
6.30. $-\frac{x}{9}+\frac{1}{9}=\frac{8}{3}-\frac{y}{3}=z+\frac{x}{2}+\frac{3}{2},\quad 6x+1+10z=0.$

Ответы. **6.16.** $\{x=-58, y=37, z=-23\}$.
6.17. $\left\{x=-116, y=-\frac{37}{2}, z=-23\right\}$.
6.18. $\left\{x=-\frac{116}{3}, y=-\frac{37}{2}, z=-\frac{23}{2}\right\}$.
6.19. $\left\{x=-116, y=\frac{37}{3}, z=-\frac{23}{2}\right\}$.
6.20. $\left\{x=-116, y=\frac{37}{5}, z=\frac{23}{2}\right\}$.

Задача 7. Найти точку M' , симметричную точке M относительно прямой.

7.1. $x+\frac{3}{2}=-5y-\frac{17}{2}\ =\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}\quad M(0,3,1)$.
7.2. $x-\frac{1}{2}=-5y+\frac{3}{2}\ =\frac{1}{2}z-\frac{3}{2},\ \ M(-2,1,-1)$.
7.3. $x-\frac{3}{2}=-5y+\frac{13}{2}\ =\frac{1}{2}z-2,\ \ M(-3,0,-2)$.
7.4. $x+\frac{5}{2}=-5y-\frac{27}{2}\ =\frac{1}{2}z,\ \ M(1,4,2)$.
7.5. $x-\frac{5}{2}=-5y+\frac{23}{2}\ =\frac{1}{2}z-\frac{5}{2},\ \ M(-4,-1,-3)$.
7.6. $x+\frac{7}{2}=-5y-\frac{37}{2}\ =\frac{1}{2}z+\frac{1}{2},\ \ M(2,5,3)$.
7.7. $x-\frac{7}{2}=-5y+\frac{33}{2}\ =\frac{1}{2}z-3,\ \ M(-5,-2,-4)$.

7.8. $x+\frac{9}{2}=-5y-\frac{47}{2}\ =\frac{1}{2}z+1,\ \ M\,(3,6,4)$.

Найти точку M', симметричную точке M относительно плоскости.

7.9. $2x-11-4y-z=0,\ \ M\,(2,-4,-2)$.

7.10. $2x-15-4y-z=0\ \ M\,(4,-2,0)$.

7.11. $2x-\frac{41}{3}-4y-z=0,\ \ M\left(\frac{10}{3},-\frac{8}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

7.7. $2x-9-4y-z=0,\ \ M\,(1,-5,-3)$.

7.13. $2x-\frac{35}{3}-4y-z=0,\ \ M\left(\frac{7}{3},-\frac{11}{3},-\frac{5}{3}\right)$.

7.14. $2x-\frac{25}{3}-4y-z=0,\ \ M\left(\frac{2}{3},-\frac{16}{3},-\frac{10}{3}\right)$.

7.15. $2x+1-4y-z=0,\ \ M\,(-4,-10,-8)$.

7.16. $x+2\,y-z+3=0\ ,M\ \ (0,5,-1)$.

7.17. $3\,x+2\,y-2\,z=0,\ M\,(1,3,-4)$.

7.18. $x-2\,y+z=1,\ \ M\,(-1,0,3)$.

7.19. $x+4\,y-3\,z=1,M\,(1,0,1)$.

7.20. $2\,x-y+z=1,\ M\,(1,1,1)$.

7.21. $\frac{1}{2}x+y-z=1,M\,(1,-1,2)$.

7.22. $\frac{1}{3}x-\frac{7}{3}y+z=1,M\,(-1,-1,3)$.

7.23. $x+\frac{7}{2}y-4z=1,M\,(-2,-1,0)$.

7.24. $\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}y+\frac{34}{3}z=1,M\,(0,-1,2)$.

7.25. $x+\frac{7}{2}y-4\ z=1,M\,(1,0,2)$.

7.26. $x+2y-z=1,\ M\,(0,-1,2)$.

7.27. $2x-5y+z=1,\ M\,(-1,0,3)$.

7.28. $5x+y-4z=1,\ M\,(2,-1,0)$.

7.29. $2x-5y+8z=1,\ M\,(0,-1,3)$.

7.30. $4x+y-5z=1,\ M\,(1,-1,2)$.

Ответы. **7.16.** $\left\{x=-\frac{14}{3},y=-\frac{13}{3},z=\frac{11}{3}\right\}$.

7.17. $\{x=-5,y=-1,z=0\}$.

7.18. $\left\{x=-\frac{4}{3},y=\frac{2}{3},z=\frac{8}{3}\right\}$.

7.19. $\left\{x=\frac{16}{13},y=\frac{12}{13},z=-\frac{16}{33}\right\}$.

7.20. $\left\{x=\frac{1}{3},y=\frac{4}{3},z=\frac{2}{3}\right\}$.

1. Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны и $\overrightarrow{AB} = \alpha a/2$, $\overrightarrow{BC} = 4(\beta a - b)$, $\overrightarrow{CD} = -4\beta b$, $\overrightarrow{DA} = a + \alpha b$. Найти α и β и доказать коллинеарность векторов $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$.

2. Разложить вектор $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ по трем некомпланарным векторам $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$, $\vec{n} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{p} = 2\vec{b} + 3\vec{c}$.

3. Найти угол между единичными векторами $vece_1$ и $\vec{e}_2$, если известно, что векторы $a = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ и $b = 5\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$ взаимно перпендикулярны.

4. Доказать компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ зная, что

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] + \left[\vec{b}, \vec{c}\right] + [\vec{c}, \vec{a}] = 0.$$

5. Доказать, что уравнение плоскости; проходящей через точки $\Big(\ x_1,\ \ y_1,\ \ z_1\ \Big)$ и $\Big(\ x_2,\ \ y_2,\ \ z_2\ \Big)$ перпендикулярно плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0.$$

6. Доказать, что уравнение плоскости, проходящей через пересекающиеся прямые $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ и $\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$ можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

7. Доказать, что уравнения прямой, проходящей через точку $\Big(\ x_1,\ \ y_1,\ \ z_1\ \Big)$ параллельно плоскостям $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ можно записать в виде

$$\frac{x - x_1}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_1}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_1}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

8. Доказать, что необходимым и достаточным условием принадлежности двух прямых $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ и $\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$ одной плоскости является выполнение равенства

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

9. Доказать, что расстояние от точки A до прямой, проходящей через точку B и имеющей направляющий вектор $\vec{S}$, определяется формулой $d = \left|\left[\ \vec{S},\ \ \overrightarrow{AB}\ \right]\right| \Big/ |S|$.

10. Даны две скрещивающиеся прямые, проходящие соответственно через точки $A\Big(\ x_1,\ \ y_1,\ \ z_1\ \Big)$ и $B\Big(\ x_2,\ \ y_2,\ \ z_2\ \Big)$. Их направляющие векторы $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$ известны. Доказать, что расстояние между ними определяется формулой

$$d = \Big|(\vec{S}_1, \vec{S}_2, \overrightarrow{AB})\Big| \Big/ \Big|\Big[\vec{S}_1, \vec{S}_2\Big]\Big|.$$

§6. Линейная алгебра. Задачи

Задача 1. Решить систему уравнений методом приведения матрицы к ступенчатому виду. Выделить фундаментальную систему решений.

1.1. $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ 14x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 10x_1 - 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} 9x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ 21x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 15x_1 - 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} 9x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 0, \\ 21x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 15x_1 + 7x_2 - 8x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 0, \\ 14x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0, \\ 10x_1 + 7x_2 - 12x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} 15x_1 - 5x_2 + 6x_3 + 16x_4 = 0, \\ 35x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 12x_4 = 0, \\ 25x_1 + 7x_2 - 12x_3 - 24x_4 = 0. \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 4x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 22x_3 - 6x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 6x_2 + 7x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 6x_2 + 11x_3 - 6x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 6x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 6x_2 + 11x_3 - 6x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 10x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 20x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 30x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

1.10. $$\begin{cases} x_1+2x_2+12x_3-2x_4+3x_5=0,\\ x_1+2x_2+28x_3-4x_4+3x_5=0,\\ x_1+2x_2+44x_3-6x_4+3x_5=0.\end{cases}$$

1.11. $$\begin{cases} 3x_1+10x_2+2x_3=0,\\ 4x_1+14x_2+5x_3=0,\\ x_1+2x_2-4x_3=0,\\ 2x_1+18x_2+6x_3=0.\end{cases}$$

1.12. $$\begin{cases} 3x_1+5x_2-4x_3=0,\\ 4x_1+7x_2-10x_3=0,\\ x_1+x_2+8x_3=0,\\ 2x_1+9x_2-12x_3=0.\end{cases}$$

1.13. $$\begin{cases} 9x_1+5x_2-4x_3=0,\\ 12x_1+7x_2-10x_3=0,\\ 3x_1+x_2+8x_3=0,\\ 6x_1+9x_2-12x_3=0.\end{cases}$$

1.14. $$\begin{cases} 3x_1+20x_2-4x_3=0,\\ 4x_1+28x_2-10x_3=0,\\ x_1+4x_2+8x_3=0,\\ 2x_1+36x_2-12x_3=0.\end{cases}$$

1.15. $$\begin{cases} 3x_1+25x_2-8x_3=0,\\ 4x_1+35x_2-20x_3=0,\\ x_1+5x_2+16x_3=0,\\ 2x_1+45x_2-24x_3=0.\end{cases}$$

1.16. $$\begin{cases} 3x_1-8x_2+3x_3-10x_4+x_5=0,\\ 3x_1-8x_2+7x_3-20x_4+x_5=0,\\ 3x_1-8x_2+11x_3-30x_4+x_5=0.\end{cases}$$

1.17. $$\begin{cases} 3x_1-75x_2-8x_3=0,\\ 4x_1-105x_2-20x_3=0,\\ x_1-15x_2+16x_3=0,\\ 2x_1-135x_2-24x_3=0.\end{cases}$$

1.18. $\begin{cases} 4x + y + 3z = 9, \\ 6x - 5y + z = -4, \\ 8x - 7y + z = 5. \end{cases}$

1.19. $\begin{cases} 3x_1 + 25x_2 - 8x_3 = 0, \\ 4x_1 + 35x_2 - 20x_3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 16x_3 = 0, \\ 2x_1 + 45x_2 - 24x_3 = 0. \end{cases}$

1.20. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 20x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 40x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 11x_3 + 60x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

1.21. $\begin{cases} 6x + 75y + 17z = 0, \\ 8x + 105y + 15z = 0, \\ 2x + 15y + 21z = 0, \\ 4x + 135y + 21z = 0. \end{cases}$

1.22. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - x_3 + 8x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 9x_2 + x_3 - 12x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

1.23. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 6x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 9x_3 + x_4 + 10x_5 = 0. \end{cases}$

1.24. $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 0, \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 + 16x_4 + x_5 = 0, \\ -x_1 + 6x_2 + x_3 - 24x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

1.25. $\begin{cases} 2x_1 - 9x_2 - x_3 + 6x_4 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 - 6x_2 + x_3 - 4x_4 - 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 + 20x_5 = 0. \end{cases}$

1.26. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

1.27. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+6x_4=0, \\ x_1-6x_5-x_2+3x_3+7x_4=0, \\ x_1-2x_5+3x_2-x_3-8x_4=0. \end{cases}$

1.28. $\begin{cases} x_1-6x_3-15x_2-6x_4-x_5=0, \\ x_1-4x_3+14x_2+4x_4+x_5=0, \\ x_1-2x_3+2x_2+x_4-5x_5=0. \end{cases}$

1.29. $\begin{cases} 2x_1-8x_3+3x_2-6x_4-x_5=0, \\ 2x_1+2x_3+2x_2+4x_4+x_5=0, \\ 2x_1+12x_3-x_2+x_4-5x_5=0. \end{cases}$

1.30. $\begin{cases} x_1-x_2+6x_3+6x_4-5x_5=0, \\ x_1+2x_2-5x_3+24x_4+x_5=0, \\ x_1+3x_2-10x_3-36x_4-x_5=0. \end{cases}$

Ответы. **1.16.** $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \frac{5}{2}t_4 \\ t_4 \\ -3t_1+8t_2+\frac{5}{2}t_4 \end{bmatrix}$. **1.17.** $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. **1.18.** $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{93}{2} \\ 42 \\ -73 \end{bmatrix}$. **1.19.** $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. **1.20.** $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ -5t_4 \\ t_4 \\ -3t_1-4t_2-5t_4 \end{bmatrix}$.

Задача 2. Решить систему уравнений методом Крамера.

2.1. $\begin{cases} 2x+y+6z=9, \\ 3x+5y+2z=-4, \\ 4x+7y+2z=5. \end{cases}$ 2.2. $\begin{cases} 2x-3y+3z=9, \\ 3x-15y+z=-4, \\ 4x-21y+z=5. \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} 4x-3y+3z=9, \\ 6x-15y+z=-4, \\ 8x-21y+z=5. \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} 2x-y+15z=11, \\ 3x-5y+5z=-1, \\ 4x-7y+5z=9. \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} 2x-y+15z=10, \\ 3x-5y+5z=1, \\ 4x-7y+5z=12. \end{cases}$

2.6. $\begin{cases} 4x-3y+3z=11, \\ 6x-15y+z=-1, \\ 8x-21y+z=9. \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} 10x-2y+3z=6, \\ 15x-10y+z=-19, \\ 20x-14y+z=-16. \end{cases}$

2.8. $\begin{cases} -2x+y+15z=9, \\ -3x+5y+5z=-4, \\ -4x+7y+5z=5. \end{cases}$

2.9. $\begin{cases} -2x+y+15z=0, \\ -3x+5y+5z=-7, \\ -4x+7y+5z=2. \end{cases}$

2.10. $\begin{cases} 14x-3y+3z=-15, \\ 21x-15y+z=-12, \\ 28x-21y+z=-3. \end{cases}$

2.11. $\begin{cases} -2x-5y+3z-t=5, \\ -3x-7y+3z+t=-1, \\ -5x-9y+6z-2t=7, \\ -4x-6y+3z-t=8. \end{cases}$

2.12. $\begin{cases} 2x-15y+3z+t=5, \\ 3x-21y+3z-t=-1, \\ 5x-27y+6z+2t=7, \\ 4x-18y+3z+t=8. \end{cases}$

2.13. $\begin{cases} 4x-15y+3z+t=6, \\ 6x-21y+3z-t=-2, \\ 10x-27y+6z+2t=9, \\ 8x-18y+3z+t=9. \end{cases}$

2.14. $\begin{cases} -2x-30y+3z-t=5, \\ -3x-42y+3z+t=-1, \\ -5x-54y+6z-2t=7, \\ -4x-36y+3z-t=8. \end{cases}$

2.15. $\begin{cases} 4x-25y+3z+t=10, \\ 6x-35y+3z-t=-6, \\ 10x-45y+6z+2t=17, \\ 8x-30y+3z+t=13. \end{cases}$

2.16. $\begin{cases} -4x-25y+3z-t=5, \\ -6x-35y+3z+t=-1, \\ -10x-45y+6z-2t=7, \\ -8x-30y+3z-t=8. \end{cases}$

2.17. $\begin{cases} 2x+3t-5y+3z=5, \\ 3x+2t-7y+3z=-1, \\ 5x+7t-9y+6z=7, \\ 4x+5t-6y+3z=8. \end{cases}$

2.18. $\begin{cases} 2x-y+3z+t=5, \\ 3x-y+3z-t=-1, \\ 5x+y+6z+2t=7, \\ 4x+2y+3z+t=8. \end{cases}$

2.19. $\begin{cases} 2x+4y-3z+t=5, \\ 3x+2y-3z-t=-1, \\ 5x+9y-6z+2t=7, \\ 4x+3y-3z+t=8. \end{cases}$

2.20. $\begin{cases} 2x-15y+3z+t=3,\\ 3x-21y+3z-t=-4,\\ 5x-27y+6z+2t=2,\\ 4x-18y+3z+t=4. \end{cases}$

2.21. $\begin{cases} -4\,x+7\,y+3\,z=3,\\ -6\,x+4\,y+z=-6,\\ -8\,x+5\,y+z=3. \end{cases}$

2.22. $\begin{cases} -4x+11y+3z=15,\\ -6x+10y+z=-2,\\ -8\,x+13\,y+z=7. \end{cases}$

2.23. $\begin{cases} -2\,x+10\,y+3\,z=15,\\ -3\,x+2\,y+z=-2,\\ -4\,x+2\,y+z=7. \end{cases}$

2.24. $\begin{cases} 10x+8y+3z=27,\\ 15x-y+z=2,\\ 20x-2\,y+z=11. \end{cases}$

2.25. $\begin{cases} -8\,x+17\,y+3\,z=18,\\ -12\,x+6\,y+z=-1,\\ -16\,x+7\,y+z=8. \end{cases}$

2.26. $\begin{cases} 2x-3y+6z=18,\\ 3x-11y+2z=-1,\\ 4x-15y+2z=8. \end{cases}$

2.27. $\begin{cases} 2x-y+6z=18,\\ 3x-34y+2z=-1,\\ 4x-47y+2z=8. \end{cases}$

2.28. $\begin{cases} -2x+7y+12z=7,\\ -3x+4y+4z=6,\\ -4x+5y+4z=19. \end{cases}$

2.29. $\begin{cases} 2x-5y+3z=-1,\\ 3x-14y+z=-19,\\ 4x-19y+z=-15. \end{cases}$

2.30. $\begin{cases} 4x-5y-3z=-1,\\ 6x-14y-z=-19,\\ 8x-19y-z=-15. \end{cases}$

Ответы. **2.16.** $\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\\ t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0\\ -\frac{3}{5}\\ -\frac{16}{3}\\ -6 \end{bmatrix}$. **2.17.** $\begin{bmatrix} x\\ t\\ y\\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6\\ 6\\ -3\\ -\frac{16}{3} \end{bmatrix}$. **2.18.** $\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\\ t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6\\ -3\\ -\frac{16}{3}\\ 6 \end{bmatrix}$. **2.19.** $\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\\ t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0\\ -3\\ -\frac{11}{3}\\ 6 \end{bmatrix}$. **2.20.** $\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\\ t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1\\ -1\\ -\frac{16}{3}\\ 6 \end{bmatrix}$.

Задача 3. Решить систему уравнений и выделить общее решение соответствующей однородной системы и частное решение неоднородной.

3.1. $\begin{cases} 3x+2y+5z-4t=2, \\ 6x+4y+4z-3t=3, \\ 9x+6y+3z-2t=4. \end{cases}$

3.2. $\begin{cases} -3x+2y+25z+4t=2, \\ -6x+4y+20z+3t=3, \\ -9x+6y+15z+2t=4. \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} 3x-4y+5z+4t=2, \\ 6x-8y+4z+3t=3, \\ 9x-12y+3z+2t=4. \end{cases}$

3.4. $\begin{cases} 3x-4y+5z-20t=-2, \\ 6x-8y+4z-15t=0, \\ 9x-12y+3z-10t=2. \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} 3x+2y+5z-4t=-18, \\ 6x+4y+4z-3t=-12, \\ 9x+6y+3z-2t=-6. \end{cases}$

3.6. $\begin{cases} -3x-2y+5z-4t=-22, \\ -6x-4y+4z-3t=-15, \\ -9x-6y+3z-2t=-8. \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} 6x-2y+5z-4t=-26, \\ 12x-4y+4z-3t=-18, \\ 18x-6y+3z-2t=-10. \end{cases}$

3.8. $\begin{cases} 21x-2y+5z-4t=2, \\ 42x-4y+4z-3t=3, \\ 63x-6y+3z-2t=4. \end{cases}$

3.9. $\begin{cases} 3x+16y+5z-4t=50, \\ 6x+32y+4z-3t=39, \\ 9x+48y+3z-2t=28. \end{cases}$

3.10. $\begin{cases} 3x+2y+30z-4t=46, \\ 6x+4y+24z-3t=36, \\ 9x+6y+18z-2t=26. \end{cases}$

3.11. $$\begin{cases} x-3\,y+5\,z-4\,t=-1,\\ 2\,x+6\,y+z=9,\\ x+y+z-2\,t=1. \end{cases}$$

3.12. $$\begin{cases} x-9y+5z+4t=3,\\ 2x+18y+z=9,\\ x+3y+z+2t=3. \end{cases}$$

3.13. $$\begin{cases} x-3y-5z-4t=19,\\ 2x+6y-z=9,\\ x+y-z-2t=11. \end{cases}$$

3.14. $$\begin{cases} x-21y+5z-4t=-5,\\ 2x+42y+z=9,\\ x+7y+z-2t=-1. \end{cases}$$

3.15. $$\begin{cases} x-24\,y=-23,\\ 2x+48y=50,\\ x+8y=9. \end{cases}$$

3.16. $$\begin{cases} 3x+4y+5z+4t=2,\\ 6x+8y+4z+3t=3,\\ 9x+12y+3z+2t=4. \end{cases}$$

3.17. $$\begin{cases} x-3y+2z-4t=-1,\\ 2x+6y+7z=9,\\ x+y+2z-2t=1. \end{cases}$$

3.18. $$\begin{cases} 3x-11y+5z+4t=2,\\ 6x-22y+4z+3t=3,\\ 9x-33y+3z+2t=4. \end{cases}$$

3.19. $$\begin{cases} x-3y+2z-9t=-1,\\ 2x+6y+7z-t=9,\\ x+y+2z-3t=1. \end{cases}$$

3.20. $$\begin{cases} x-3\,y+5\,z+t=-7,\\ 2x+6y+z+t=21,\\ x+y+z-t=3. \end{cases}$$

3.21. $\begin{cases} 3x + 2y + z + 29t = 2, \\ 6x + 4y - 4z + 23t = 3, \\ 9x + 6y - 9z + 17t = 4. \end{cases}$

3.22. $\begin{cases} 6x - 2\,y + 17\,z + 12\,t = -18, \\ 12x - 4\,y + 28\,z + 9\,t = -12, \\ 18x - 6\,y + 39\,z + 6\,t = -6. \end{cases}$

3.23. $\begin{cases} -3\,x - 2\,y + 21\,z + 12\,t = 6, \\ -6\,x - 4\,y + 36\,z + 9\,t = 6, \\ -9\,x - 6\,y + 51\,z + 6\,t = 6. \end{cases}$

3.24. $\begin{cases} -6\,x - 2\,y - 4\,z + 12\,t = 22, \\ -12\,x - 4\,y - 20\,z + 9\,t = 18, \\ -9\,x - 3\,y - 18\,z + 3\,t = 7. \end{cases}$

3.25. $\begin{cases} 9x - 2\,y + 139\,z + 12\,t = 14, \\ 18x - 4\,y + 128\,z + 9\,t = 12, \\ 27x - 6\,y + 117\,z + 6\,t = 10. \end{cases}$

3.26. $\begin{cases} 6x - 14y + 17z + 36t = 33, \\ 12x - 28y + 28z + 27t = 72, \\ 18x - 42y + 39z + 18t = 111. \end{cases}$

3.27. $\begin{cases} 12x - 2y + 25z - 73t = -18, \\ 24x - 4y + 44z - 131t = -12, \\ 36x - 6y + 63z - 189t = -6. \end{cases}$

3.28. $\begin{cases} 12x - 6y + 25z - 73t = 18, \\ 24x - 12y + 44z - 131t = 15, \\ 36x - 18y + 63z - 189t = 12. \end{cases}$

3.29. $\begin{cases} -6x - 2y + 27z - 73t = -30, \\ -12x - 4y + 48z - 131t = -36, \\ -18x - 6y + 69z - 189t = -42. \end{cases}$

3.30. $\begin{cases} 6x - 4y + 27z - 73t = -30, \\ 12x - 8y + 48z - 131t = -36, \\ 18x - 12y + 69z - 189t = -42. \end{cases}$

Ответы. **3.16.**

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{5}-\frac{4}{3}t_2-\frac{1}{15}t_3 \\ t_2 \\ t_3 \\ -\frac{6}{5}t_3+\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} -\frac{1}{15} \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{6}{5} \end{bmatrix}.$$

3.17.

$$\begin{bmatrix} 1-\frac{23}{3}t_2 \\ t_2 \\ \frac{4}{3}t_2+1 \\ -2t_2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -\frac{23}{3} \\ 1 \\ \frac{4}{3} \\ -2 \end{bmatrix}.$$

3.18.

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{5}+\frac{11}{3}t_2-\frac{1}{15}t_3 \\ t_2 \\ t_3 \\ -\frac{6}{5}t_3+\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} \frac{11}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} -\frac{1}{15} \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{6}{5} \end{bmatrix}.$$

3.19.

$$\begin{bmatrix} -22+\frac{23}{2}t_3 \\ 8-\frac{9}{2}t_3 \\ t_3 \\ -5+3t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22 \\ 8 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} \frac{23}{2} \\ -\frac{9}{2} \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

3.20.

$$\begin{bmatrix} \frac{76}{7}-\frac{23}{7}t_2 \\ t_2 \\ -\frac{30}{7}+\frac{10}{7}t_2 \\ \frac{25}{7}-\frac{6}{7}t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{76}{7} \\ 0 \\ -\frac{30}{7} \\ \frac{25}{7} \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -\frac{23}{7} \\ 1 \\ \frac{10}{7} \\ -\frac{6}{7} \end{bmatrix}.$$

Задача 4. Оператор $\mathscr{A}$ и векторы x и b заданы своими координатами в некотором базисе f_1, f_2, f_3 пространства[9] R^3 $(x = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 = \{x_1, x_2, x_3\})$. Найти матрицу этого оператора и матрицу обратного к нему оператора в том же базисе. Решить уравнение $\mathscr{A}x = b$.

[9] Напомним, что фигурными скобками обычно обозначают координатные столбцы данного вектора в выбранном базисе.

4.1. $\mathscr{A}x = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_3 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$

4.2. $\mathscr{A}x = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 - x_3 \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ x_1 - 2x_2 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$

4.3. $\mathscr{A}x = \begin{bmatrix} x_1 - 3x_2 - x_3 \\ -x_1 + 5x_2 - 2x_3 \\ x_1 - 3x_2 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$

4.4. $\mathscr{A}x = \begin{bmatrix} x_1 - 4x_2 + x_3 \\ -x_1 + 6x_2 + 2x_3 \\ x_1 - 4x_2 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

4.5. $\mathscr{A}x = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 \\ -x_1 + 8x_2 + 2x_3 \\ x_1 - 2x_2 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

4.6. $\mathscr{A}x = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 + x_2 \\ -x_1 + 4x_3 + 5x_2 \\ x_1 - 2x_3 + x_2 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

4.7. $\mathscr{A}\,x = \begin{bmatrix} x_1 - 5x_2 + x_3 \\ -x_1 + 11x_2 + 2x_3 \\ x_1 - 5x_2 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

4.8. $\mathscr{A}x = \begin{bmatrix} x_1 + 4x_2 \\ -x_1 + 6x_3 + 2x_2 \\ x_1 - 2x_3 + 4x_2 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$

4.9. $\mathscr{A}x = \begin{bmatrix} 2x_1 - 5x_2 - 2x_3 \\ -2x_1 + 11x_2 - 4x_3 \\ 2x_1 - 5x_2 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

4.10. $\mathscr{A}x = \begin{bmatrix} x_1 - 3x_2 + 5x_3 \\ -x_1 - 3x_2 + 10x_3 \\ x_1 - 3x_2 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

4.11. $\mathscr{A}x = \begin{bmatrix} x_1 - 3x_2 - 3x_3 \\ -x_1 - 3x_2 - 12x_3 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$

4.12. $\mathscr{A}x = \begin{bmatrix} 2x_1 - 5x_2 - x_3 \\ -2x_1 - x_2 - 5x_3 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$

4.13. $\mathscr{A}x = \begin{bmatrix} x_1 - 5x_3 \\ -x_1 + 3x_2 - 10x_3 \\ x_1 - 3x_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

4.14. $\mathscr{A}x = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 - 2x_3 \\ -2x_1 + 7x_2 - 7x_3 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

4.15. $\mathscr{A}x = \begin{bmatrix} x_1 - 3x_2 + 6x_3 \\ -x_1 + 2x_2 - 9x_3 \\ x_1 - 2x_2 + 7x_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$

4.16. $\mathscr{A}\,x = \begin{bmatrix} x_1 - 5x_3 \\ -x_1 - 6x_2 - 10x_3 \\ x_1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

4.17. $\mathscr{A}\,x = \begin{bmatrix} x_1 - 6x_3 \\ -x_1 - 6x_2 - 12x_3 \\ x_1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

4.18. $\mathscr{A}\,x = \begin{bmatrix} x_1 - 3x_3 \\ -x_1 - 4x_2 - 6x_3 \\ x_1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

4.19. $\mathscr{A}\,x = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_3 \\ -2x_1 + 10x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

4.20. $\mathscr{A}\,x = \begin{bmatrix} -5x_1 - x_3 \\ 5x_1 + 12x_2 - 2x_3 \\ -5x_1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

4.21. $\mathscr{A}x = \begin{bmatrix} x_1 - 3x_2 + x_3 \\ 2x_2 - 3x_3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}.$

4.22. $\mathscr{A}x = \begin{bmatrix} x_1 - 6x_2 - 3x_3 \\ 4x_2 + 9x_3 \\ 2x_1 - 10x_2 - 9x_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$

4.23. $\mathscr{A}x = \begin{bmatrix} -5x_1 - 3x_2 - 3x_3 \\ 2x_2 + 9x_3 \\ -10x_1 - 5x_2 - 9x_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$

4.24. $\mathscr{A}x = \begin{bmatrix} 6x_1 + 6x_2 + 5x_3 \\ -4x_2 - 15x_3 \\ 12x_1 + 10x_2 + 15x_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

4.25. $\mathscr{A}x = \begin{bmatrix} 4x_1 + 9x_2 + 2x_3 \\ -6x_2 - 6x_3 \\ 8x_1 + 15x_2 + 6x_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

4.26. $Ax = \begin{bmatrix} -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ -2x_2 - 15x_3 \\ -4x_1 + 5x_2 + 15x_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

4.27. $Ax = \begin{bmatrix} -4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ 2x_1 - 2x_2 - 15x_3 \\ -7x_1 + 5x_2 + 15x_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

4.28. $Ax = \begin{bmatrix} 4x_2 - x_1 - x_3 \\ -4x_3 - 2x_2 \\ 7x_2 - 2x_1 + x_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$

4.29. $Ax = \begin{bmatrix} 4x_2 - 2x_1 - 2x_3 \\ -x_3 - 2x_2 \\ 7x_2 - 4x_1 - 2x_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$

4.30. $Ax = \begin{bmatrix} -5x_1 + 9x_2 + 5x_3 \\ 2x_1 - 6x_2 - 15x_3 \\ -9x_1 + 15x_2 + 15x_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$

Ответы.

4.16. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -1 & -6 & -10 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{7}{6} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$.

4.17. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ -1 & -6 & -12 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

4.18. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & -4 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{13}{4} \\ 2 \end{bmatrix}$.

4.19. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 10 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$.

4.20. $A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 5 & 12 & -2 \\ -5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{5}{6} \\ 4 \end{bmatrix}$.

Задача 5. Пусть $x = \left\{ x_1,\ x_2,\ x_3 \right\}$, $\mathscr{B}x = \left\{ 3x_2,\ x_1 - 2x_3,\ 3x_1 \right\}$, $\mathscr{A}x = \left\{ x_2 - 2x_3,\ x_1 - x_2,\ 3x_1 + x_3 \right\}$. Найти:

5.1. $\left(\mathscr{B} + 2\mathscr{A}^2\right) x$.

5.2. $\mathscr{B}^2\mathscr{A}x$.

5.3. $\left(3\mathscr{A}^2 - 2\mathscr{B}\right) x$.

5.4. $\left(\mathscr{A}^2 + 4\mathscr{B}\right) x$.

5.5. $\left(4\mathscr{A} - \mathscr{B}^2\right) x$.

5.6. $\left(2\mathscr{B} + \mathscr{A}^2\right) x$.

5.7. $\left(\mathscr{B}^2 - 7\mathscr{A}\right) x$.

5.8. $\left(\mathscr{B}^2 + 5\mathscr{A}\right) x$.

5.9. $(\mathscr{A}(\mathscr{B}+3\mathscr{A}))\,x$.
5.10. $\left(\mathscr{A}^2\mathscr{B}^2\right)x$.
5.11. $(\mathscr{B}(\mathscr{A}+\mathscr{B}))\,x$.
5.12. $(\mathscr{A}+\mathscr{B}\mathscr{A}-\mathscr{B})\,x$.
5.13. $\left(3\mathscr{B}+2\mathscr{A}^2\right)x$.
5.14. $(\mathscr{B}(2\mathscr{A}+\mathscr{B}))\,x$.
5.15. $\left(3\mathscr{B}^2-\mathscr{A}^2\right)x$.
5.16. $\left(\mathscr{A}^2-4\,\mathscr{B}\right)x$.
5.17. $((\mathscr{A}+\mathscr{B})(\mathscr{A}-\mathscr{B}))\,x$.
5.18. $\left(\mathscr{B}\mathscr{A}-3\ \ \mathscr{A}^2\right)x$.
5.19. $\left(\mathscr{A}^2-3\,\mathscr{A}\mathscr{B}\right)x$.
5.20. $\mathscr{A}\,(3\,\mathscr{A}-2\mathscr{B})\,x$.
5.21. $\left(\mathscr{B}^2+3\mathscr{A}^2\right)x$.
5.22. $(\mathscr{B}^2-2\mathscr{A})x$.
5.23. $\left(4\mathscr{A}^2-5\mathscr{B}^2\right)x$.
5.24. $3\left(\mathscr{A}^2-14\mathscr{B}\mathscr{A}^2\right)x$.
5.25. $\left(3\mathscr{A}\mathscr{B}-\mathscr{B}^2\right)x$.
5.26. $\left(\mathscr{B}^2-7\mathscr{A}\mathscr{B}\right)x$.
5.27. $\left(\mathscr{A}^2B-\mathscr{B}\mathscr{A}\right)x$.
5.28. $(\mathscr{A}-\mathscr{B}\mathscr{A})\,x$.
5.29. $(\mathscr{A}\mathscr{B}-\mathscr{B}\mathscr{A})\,x$.
5.30. $(\mathscr{A}\mathscr{B}-\mathscr{A}\mathscr{B})\,x$.

Ответы. **5.16.** $\begin{bmatrix} -5x_1-13x_2-2x_3 \\ -5x_1+2x_2+6x_3 \\ -9x_1+3x_2-5x_3 \end{bmatrix}$ **5.17.** $\begin{bmatrix} -4x_2+6x_3 \\ -3x_2-8x_3 \\ -12x_2-11x_3 \end{bmatrix}$.

5.18. $\begin{bmatrix} 18x_1+6x_3 \\ -3x_1-5x_2+2x_3 \\ -9x_1-6x_2+9x_3 \end{bmatrix}$. **5.19.** $\begin{bmatrix} 10x_1-x_2+4x_3 \\ 2x_1-7x_2-8x_3 \\ -6x_1-24x_2-5x_3 \end{bmatrix}$.

5.20. $\begin{bmatrix} -5x_1-3x_2-2x_3 \\ -x_1-10x_3 \\ 3x_1-9x_2-15x_3 \end{bmatrix}$.

Задача 6. Матрица A некоторого оператора $\mathscr{A}:R^3\to R^3$ и вектор $x=\{0,-2,3\}$ заданы в базисе e_1,e_2,e_3. Найти матрицу оператора $\mathscr{A}$ и образ $\mathscr{A}x$ вектора x в базисе $f_1=e_1-e_2$, $f_2==e_1+e_2$, $f_3=e_1+e_2-e_3$.

6.1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. 6.3. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. 6.5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6.2. $\begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. 6.4. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. 6.6. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6.7. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

6.8. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

6.9. $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

6.10. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

6.11. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6.12. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6.13. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

6.14. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

6.15. $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

6.16. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6.17. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6.18. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6.19. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6.20. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6.21. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 3 \end{pmatrix}$.

6.22. $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

6.23. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

6.24. $\begin{pmatrix} 8 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

6.25. $\begin{pmatrix} -4 & -4 & 5 \\ -3 & 1 & 8 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

6.26. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

6.27. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

6.28. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

6.29. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

6.30. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Ответы. **6.16.** $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{9}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}$.

6.17. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{9}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$.

6.18. $\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{13}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$.

6.19. $\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{9}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ -3 & -3 & -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{17}{2} \\ -3 \end{bmatrix}$.

6.20. $\begin{bmatrix} -1 & -3 & -\frac{7}{2} \\ 5 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{17}{2} \\ -3 \end{bmatrix}$.

Задача 7. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы.

7.1. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$. 7.2. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$. 7.3. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. 7.4. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

7.5. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. 7.6. $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. 7.7. $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. 7.8. $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

7.9. $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. 7.10. $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. 7.11. $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. 7.12. $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

7.13. $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. 7.14. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. 7.15. $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. 7.16. $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$.

7.17. $\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$. 7.18. $\begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$. 7.19. $\begin{bmatrix} 7 & -10 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$. 7.20. $\begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$.

Ответы. **7.16.** $\lambda_1 = -1, \varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\lambda_2 = 1, \varphi_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. **7.17.** $\lambda_1 = -1, \varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\lambda_2 = 2, \varphi_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. **7.18.** $\lambda_1 = -3$ $, \varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\lambda_2 = 1$ $, \varphi_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. **7.19.** $\lambda_1 = -3, \varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\lambda_2 = 2$ $, \varphi_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. **7.20.** $\lambda_1 = 3$ $, \varphi_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\lambda_2 = -1$ $, \varphi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Задача 8. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.

8.1. $x^2 - 4xy - 4xz + 4yz + 4z^2$.

8.2. $x^2 + 8xy - 4xz - 8yz + 4z^2$.

8.3. $9x^2 - 12xy - 12xz + 4yz + 4z^2$.

8.4. $x^2 - 4xy - 12xz + 12yz + 36z^2$.

8.5. $9x^2 + 12xy - 24xz - 8yz + 16z^2$.

8.6. $x^2 - 2xy + 2xz - z^2$.

8.7. $9x^2 - 6xy + 6xz - z^2$.

8.8. $x^2 + 10xy + 2xz - z^2$.

8.9. $x^2 - 10xy - 2xz - z^2$.

8.10. $9x^2 + 12xy + 6xz - z^2$.

8.11. $x^2 + 12xy + 2xz + 11y^2 + 2yz - z^2$.

8.12. $x^2 + 2xz - y^2 - 2yz - z^2$.

8.13. $x^2 + 8xz - y^2 - 8yz - 16z^2$.

8.14. $x^2 + 10xz - y^2 - 10yz - 16z^2$.

8.15. $x^2 + 14xy + 2xz + 12y^2 - z^2$.

8.16. $25\,x^2 - 20xy + 20xz - 4yz + 4z^2$.

8.17. $9x^2 - 24xy + 12xz - 8yz + 4z^2$.

8.18. $x^2 - 4xy - 6xz - 9z^2$.

8.19. $9x^2 - 12xy + 18xz - 9z^2$.

8.20. $25x^2 - 20xy + 70xz - 49z^2$.

8.21. $x^2 + 8xz - y^2 + 4yz + 16z^2$.

8.22. $4x^2 - 24xz - y^2 - 6yz + 36z^2$.

8.23. $25x^2 - 20xz - y^2 + 2yz + 4z^2$.

8.24. $4x^2 - 40xz - 4y^2 + 20yz + 100z^2$.

8.25. $4x^2 - 32xz - 25y^2 + 40yz + 64z^2$.

8.26. $x^2 - 12xy - 4xz + 12yz + 4z^2$.

8.27. $4x^2 - 24xy - 8xz + 12yz + 4z^2$.

8.28. $16x^2 + 16xy - 16xz - 4yz + 4z^2$.

8.29. $25x^2 + 60xy - 20xz - 12yz + 4z^2$.

8.30. $25x^2 - 40xy - 20xz + 8yz + 4z^2$.

Ответы. **8.16.** $25\left(x-\frac{2}{5}y+\frac{2}{5}z\right)^2-4\left(y-\frac{1}{2}z\right)^2+z^2 \Leftrightarrow 25\,u^2-4\,v^2+w^2$.
8.17. $9\left(x-\frac{4}{3}y+\frac{2}{3}z\right)^2-16\left(y-\frac{1}{4}z\right)^2+z^2 \Leftrightarrow 9\;u^2-16\;v^2+w^2$.
8.18. $(x-2y-3z)^2-4\left(y+\frac{3}{2}z\right)^2-9z^2 \Leftrightarrow u^2-4\;v^2-9\;w^2$.
8.19. $9\left(x-\frac{2}{3}y+z\right)^2-4\left(y-\frac{3}{2}z\right)^2-9z^2 \Leftrightarrow 9\;u^2-4\;v^2-9\;w^2$.
8.20. $25\left(x-\frac{2}{5}y+\frac{7}{5}z\right)^2-4\left(y-\frac{7}{2}z\right)^2-49z^2 \Leftrightarrow 25\;u^2-4\;v^2-49\;w^2$.

Теоретические упражнения

1. Найти какой-нибудь базис и размерность подпространства L пространства R_3, если L задано уравнением $x_1-2x_2+x_3=0$.

2. Доказать, что все симметрические матрицы третьего порядка образуют линейное подпространство всех квадратных матриц третьего порядка. Найти базис и размерность этого подпространства.

3. Найти координаты многочлена $P_3(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ в базисе $1,\ (x-1),\ (x-1)^2,\ (x-1)^3$.

4. Линейный оператор A в базисе $\left(e_1,\ e_2,\ e_3\right)$ имеет матрицу $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Найти матрицу этого же оператора в базисе $\left(e_1,\ \ e_1+e_2,\ \ e_1+e_2+e_3\right)$.

5. Найти ядро и область значений оператора дифференцирования в пространстве многочленов, степени которых меньше или равны трем.

6. Пусть x и y — собственные векторы оператора A, относящиеся к различным собственным значениям. Доказать, что вектор $z=\alpha x+\beta y,\ \alpha\neq 0,\ \beta\neq 0$ не является собственным вектором оператора A.

7. Пусть $x=\left\{x_1,\ \ x_2,\ \ x_3\right\}$, $Ax=\left\{\alpha_1x_1,\ \ \alpha_2x_2,\ \ \alpha_3x_3\right\}$. Будет ли оператор A самосопряженным?

8. Доказать, что если матрица оператора A — симметрическая в некотором базисе, то она является симметрической в любом базисе (базисы — ортонормированные).

9. Проверить, будет ли линейным пространством заданное ниже множество, в котором определены сумма любых двух элементов a и b и произведение любого элемента a на любое число α?

1. Множество всех квадратных матриц

2. $a=\|a_{ik}\|$, $\quad b=\|b_{ik}\|$, $\quad i,\ k=1,\ 2,\ ...,\ n$; сумма $\|a_{ik}+b_{ik}\|$, произведение $\|\alpha a_{ik}\|$.

3. Множество всех диагональных матриц $a = \|a_{ik}\|$, $b = \|b_{ik}\|$ размера $n \times n$; сумма $\|a_{ik}\| \cdot \|b_{ik}\|$, произведение $\|\alpha a_{ik}\|$.
4. Множество всех квадратных матриц
5. $a = \|a_{ik}\|$, $b = \|b_{ik}\|$, $i = 1,\ 2,\ ...,\ m;$ $k = 1,\ 2,\ ...,\ n$; сумма $\|a_{ik} + b_{ik}\|$, произведение $\|\alpha a_{ik}\|$.
6. Множество всех симметричных матриц
7. $a = \|a_{ik}\|$ $(a_{ik} = a_{ki})$, $b = \|b_{ik}\|$ $(b_{ik} = b_{ki})$, $i,\ k = 1,\ 2,\ ...,\ n$; сумма $\|a_{ik} + b_{ik}\|$, произведение $\|\alpha a_{ik}\|$.
8. Множество всех целых чисел; сумма $a + b$, произведение $\alpha \cdot a$.
9. Множество всех действительных чисел; сумма $a + b$, произведение $\alpha \cdot a$.
10. Множество всех положительных чисел; сумма $a \cdot b$, произведение a^{α}.
11. Множество всех отрицательных чисел; сумма $-|a| \cdot |b|$, произведение $-|a|^{\alpha}$.
12. Множество всех действительных чисел; сумма $a \cdot b$, произведение $\alpha \cdot a$.
13. Множество всех дифференцируемых функций $a = f(t)$, $b = g(t)$; сумма $f(t) + g(t)$, произведение $\alpha \cdot f(t)$.
14. Множество всех дифференцируемых функций $a = f(t)$, $b = g(t)$; сумма $f(t) \cdot g(t)$, произведение $\alpha \cdot f(t)$.

***

Приложение. Некоторые формулы, необходимые для выполнения расчета.

1. Таблица эквивалентных бесконечно малых.

Если $u(x) \to 0$ $(x \to x_0)$, то верны соотношения:

1) $\sin u \sim u$; 2)$\mathrm{tg} u \sim u$; 3) $\arcsin u \sim u$; 4)$\mathrm{arctg}\, u \sim u$; 5)$1 - \cos u \sim \dfrac{1}{2}u^2$;

6)$e^u - 1 \sim u$; 7) $a^u - 1 = u \ln a, a > 0, a \neq 1$; 8) $\ln(1 + u) \sim u$;

9)$(1 + u)^{\sigma} - 1 \sim \sigma \cdot u, \sigma = \mathrm{const}$.

При $n \to +\infty$ применяется также асимптотическое равенство

$$10)\ \sqrt[k]{\frac{a_m n^m + ... + a_0}{b_s n^s + ... + b_0}} \sim \sqrt[k]{\frac{a_m n^m}{b_s n^s}}\ (a_m \cdot b_s \neq 0)\,.$$

Таблица производных. В области определения соответствующих функций имеют место следующие формулы :

1) $(C)' = 0 \, (C = \text{const.})$;
2) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a \left(a_{\neq 1}^{>0} = \text{const.}\right), (e^x)' = e^x$;
3) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \, (\alpha = \text{const.})$;
4) $(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \, (x \neq 0)$;
5) $(\sin x)' = \cos x, \ (\cos x)' = -\sin x, \ (\text{tg } x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $(\text{ctg } x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
6) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\text{arctg } x)' = \frac{1}{1+x^2}, \ (\text{arcctg } x)' = -\frac{1}{1+x^2}$;
7) $(\text{sh } x)' \equiv \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \text{ch } x, (\text{ch } x)' \equiv \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \text{sh } x$, $(\text{th } x)' \equiv \left(\frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}\right)' = \frac{1}{\text{ch}^2 x}$.
8) $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\, x^{\alpha-n} \, (\alpha = \text{const})$;
9) $(a^x)^{(n)} = (\ln^n a) \cdot a^x \left(a_{\neq 1}^{>0} = \text{const}\right), (e^x)^{(n)} = e^x$;
10) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$.

Формула Лейбница. *Если функции* $u = u(x)$, $v = v(x)$ *дифференцируемы* n *раз в точке* x, *то имеет место равенство*

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} = $$
$$= u^{(n)} v + C_n^1 u^{(n-1)} v' + C_n^2 u^{(n-2)} v + \ldots + C_n^{n-1} u' v^{(n-1)} + u v^{(n)}.$$

Здесь: $C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)\ldots3\cdot2\cdot1}$ – *число сочетаний*[10] *из* n *элементов по* k, *нулевая производная функции* $g(x)$ *совпадает с ней самой:* $g^{(0)} \equiv g(x)$.

Формула Тейлора. *Если функция* $f(x)$ *удовлетворяет следующим условиям:* 1) $f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ *существуют и непрерывны на отрезке* $[x_0 - h, x_0 + h]$; 2) *производная* $f^{(n+1)}(x)$ *существует и конечна по крайней мере на интервале* $(x_0 - h, x_0 + h)$. *Тогда для всех* $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ *функция* $f(x)$ *представляется в виде*

$$\begin{aligned} f(x) &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \equiv \\ &\equiv f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \\ &+ \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \end{aligned}$$

где точка $x = c$ *находится между точками* x_0 *и* x $(c = x_0 + \theta \times (x - x_0), \ 0 < \theta < 1)$ (эту формулу называют (*глобальной) формулой Тейлора с остаточным членом* $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ *в форме Лагранжа*).

Локальная формула Тейлора. *Пусть функция* $f(x)$ *имеет в точке* $x = x_0$ *производные* $f^{(0)}(x_0) \equiv f(x_0), f'(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ *до* n*-го порядка включитель-*

[10] Полезно знать, что $C_n^k = C_n^{n-k}$.

но. Тогда $f(x)$ *имеет в точке* $x = x_0$ *асимптотическое разложение* n *-го порядка вида*

$$\begin{aligned} & f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right) \equiv \\ & \equiv f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \\ & + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right) \ (x \to x_0) \end{aligned}$$

Здесь $o\left((x-x_0)^n\right)$ — остаточный член в форме Пеано.

Имеют место следующие разложения:

1) $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \equiv 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \ (x \to 0)$;

2) $\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \equiv$
$\equiv x - \frac{x^3}{3!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \ (x \to 0)$;

3) $\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n}\right) \equiv$
$\equiv 1 - \frac{x^2}{2!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right) \ (x \to 0)$;

4) $\ln\,(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \equiv$
$\equiv x - \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \ (x \to 0)$;

5) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^n}{n!} + o(x^n)\,(x \to 0, \alpha = \mathrm{const})$.

Таблица неопределенных интегралов:

1. $\int 0dx = C = \mathrm{const}$,
2. $\int dx = x + C$
3. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1 - \text{постоянная})$,
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$,
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$,
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$,
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$,
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C$,
9. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ \left(a_{\neq 1}^{>0} - \text{постоянная}\right)$, $\int e^x dx = e^x + C$,
10. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C \ (a > 0 - \text{постоянная})$,
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \ (a > 0 - \text{постоянная})$,
12. $\int \mathrm{sh}\, x dx = \mathrm{ch}\, x + C$,
13. $\int \mathrm{ch}\, x dx = \mathrm{sh}\, x + C$,
14. $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\, x + C$,
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$,
16. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$. **Алгоритм *метода Гаусса* построения общего решения неоднородной системы** $Ax = b$.

1. Строим расширенную матрицу $\hat{A} = (A|b)$ *системы* $Ax = b$.

2. С помощью элементарных преобразований строк приводим матрицу $\hat{A}$ *к ступенчатому виду* $\hat{B} = (B|d)$.

3. По матрице $\hat{B} = (B|d)$ *восстанавливаем систему уравнений; при этом уравнения, соответствующие нулевым строкам матрицы* $\hat{B}$ *не выписываем.*

4. Неизвестные, коэффициентами которых являются опорные элементы[11] *матрицы $\hat{B}$, объявляем базисными (закрепленными), оставляем их в левых частях уравнений, а остальные неизвестные объявляем свободными и переносим их в правые части уравнений.*

5. Придавая свободным неизвестным значения произвольных постоянных, решаем полученную систему уравнений обратным ходом, находим базисные неизвестные и , наконец, записываем общее решение исходной системы уравнений в виде $x = c_1 f_1 + ... + c_{n-r} f_{n-r} + x_* \Leftrightarrow x_{\text{он}} = x_{\text{оо}} + x_{\text{чн}}$.

Теорема Крамера. *Пусть в системе $Ax = b$ хотя бы один из ее коэффициентов a_{ij} не равен нулю. Тогда для того чтобы система $Ax = b$ имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы её главный определитель Δ был не равен нулю. В этом случае решение системы $Ax = b$ даётся формулами Крамера: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, ..., $x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$. Если $\Delta = 0$ и хотя бы один из определителей $\Delta_j \neq 0$, то система $Ax = b$ решений не имеет. Если все $\Delta = \Delta_1 = ... = \Delta_n = 0$, то система $Ax = b$ либо не имеет решений вообще, либо имеет их бесчисленное множество* (здесь $\Delta = \det A$, Δ_j — определитель, полученный из Δ заменой его j-го столбца на столбец b).

Пусть линейный оператор $\mathbf{A} : L \to L$, действует из пространства L в себя и пусть в линейном пространстве L выбраны два базиса: $\{e_1, ..., e_n\}$ и $\{g_1, ..., g_n\}$. Матрица T, определяемая соотношением $(g_1, g_2, ..., g_n) = (e_1, ..., e_n)T$, называется *матрицей перехода* от базиса $\{e_1, ..., e_n\}$ к базису $\{g_1, ..., g_n\}$. Координаты $\{x_1, ..., x_n\}$ вектора $x \in L$ в базисе $\{e_1, ..., e_n\}$ и координаты $\{x'_1, ..., x'_n\}$ того же вектора в базисе $\{g_1, ..., g_n\}$ связаны соотношениями

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

а матрица A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $\{e_1, ..., e_n\}$ связана с матрицей B этого же оператора в базисе $\{g_1, ..., g_n\}$ — соотношением $B = T^{-1}AT$.

[11]Опорными элементами матрицы называются первые слева отличные от нуля элементы каждой из строк матрицы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кузнецов, Л.А.** Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты: учебное пособие/Л.А. Кузнецов —М.: Изд-во «Лань», 2005. – 240 с.

2. **Бободжанов, А.А, Бободжанова, М.А., Сафонов, В.Ф.** Высшая математика. Лекции: учебное пособие — М.: Издательство МЭИ, 2015. — 348 с.

3. **Курс высшей математики.** Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление /Под ред. И.М. Петрушко — М.: Изд-во«Лань», 2005. – 288с.

4. **Курс высшей математики.** Интегральное исчисление. Функции нескольких переменных. Дифференциальные уравнения /Под ред. И.М. Петрушко. — М.: Изд-во «Лань», 2006. – 608 с.

5. **Павлов, А.Л. , Петрушко, М.И.** Высшая математика. Функции нескольких переменных. Сборник заданий: метод. пособие /А.Л. Павлов,М.И. Петрушко. —М.: Изд. дом МЭИ, 2006. – 52 с.

6. **Сафонов, В.Ф.** Руководство для самостоятельного изучения студентами-энергетиками основ математического анализа/В.Ф.Сафонов.— М. : МЭИ, 1989. – 76 с.

7. **В.Г. Крупин, А.Л. Павлов, Л.Г. Попов** Высшая математика. Теория Функций комплексного переменного. Операционное исчисление. Сборник задач с решениями: учебное пособие. – М.: Издательский дом МЭИ, 2012.–304 с.