Лекция 2. Односторонние пределы и непрерывность функции в точке. Классификация точек разрыва. Производная. Дифференцирование сложной функции

2.1. Односторонние пределы

Для корректного описания непрерывности функции в точке и классификации точек разрыва используются понятия правого и левого пределов в точке. Дадим их кратко.

Определение 2.1. Левый предел *функции* $f(x)$ *в точке* $x = x_0$ *(обозначение:* $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \equiv f(x_0-0)$*)*:

$$\left(f(x_0-0) \overset{def}{=} \lim_{x\to x_0\,(x<x_0)} f(x) = P \right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : (\forall x)\left(x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow | f(x) - P | < \varepsilon\right)\right).$$

Правый предел *функции* $f(x)$ *в точке* $x = x_0$ *(обозначение:* $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \equiv f(x_0+0)$*)*:

$$\left(f(x_0+0) \overset{def}{=} \lim_{x\to x_0\,(x>x_0)} f(x) = P \right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : (\forall x)\left(x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow | f(x) - P | < \varepsilon\right)\right).$$

Очевидно следующее свойство:

1^0) *Для существования обычного предела* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = P$ *необходимо и достаточно, чтобы существовали односторонние пределы* $f(x_0 \pm 0)$ *и чтобы имело место равенство*

$$f(x_0-0) = f(x_0+0) = P.$$

2.2. Непрерывность функции в точке и на множестве

Пусть функция $f(x)$ определена в точке $x = x_0$ и некоторой ее окрестности.

Определение 2.2. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x = x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, т. е. если

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : (\forall x)\big(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\big).$$

Функция $f(x)$ называется *непрерывной слева (справа) в точке* $x = x_0$, *если* $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ *(соответственно* $f(x_0 + 0) = f(x_0)$*).*

Функция $f(x)$ называется *непрерывной на множестве A,* если она непрерывна в каждой точке $x_0 \in A$ этого множества.

Очевидны следующие высказывания.

2^0) $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$ тогда и только тогда, когда $f(x) = f(x_0) + o(1)(x \to x_0)$.[1]

3^0) *Для того чтобы функция* $f(x)$ *была непрерывна в точке* $x = x_0$, *необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывна слева и справа в точке* $x = x_0$.

Нетрудно показать, *что сумма, разность и произведение двух функций, непрерывных в точке* $x = x_0$, *также являются непрерывными в этой точке функциями. Частное* $f(x)/g(x)$ *двух непрерывных в точке* $x = x_0$ *функций непрерывно в этой точке, если* $g(x_0) \neq 0$.

С непрерывными функциями связаны следующие два важных утверждения.

Теорема 2.1. *Пусть сложная функция* $f(\varphi(x))$ *определена в некоторой проколотой окрестности точки* $x = x_0$ *и пусть выполнены условия:*

а) существует $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = u_0$,

б) функция $f(u)$ *непрерывна в точке* $u = u_0$.

Тогда существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x))$ *и имеет место равенство*

[1] Это равенство называется асимптотическим разложением непрерывной в точке $x = x_0$ функции.

$$\lim_{x\to x_0} f\left(\varphi(x)\right) = f\left(\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\right) = f\left(u_0\right).$$

Теорема 2.2. *Пусть сложная функция* $f\left(\varphi(x)\right)$ *определена в точке* $x = x_0$ *и некоторой ее окрестности и пусть выполнены условия:*

а) функция $u = \varphi(x)$ *непрерывна в точке* $x = x_0$,

б) функция $f(u)$ *непрерывна в соответствующей точке* $u = u_0 = \varphi(x_0)$.

Тогда сложная функция $F(x) = f\left(\varphi(x)\right)$ *непрерывна в точке* $x = x_0$.

Теорему 2.1 называют теоремой *о переходе к пределу под знаком непрерывной функции,* а теорему 2.2 — теоремой *о непрерывности сложной функции*.

Пример 2.1. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} cos\left(\sin x / x\right) = P.$

Решение. Так как существует $\lim\limits_{x\to 0}\left(sin\ x / x\right) = 1,$ а функция $cos\, u$ непрерывна в точке $u = 1,$ то по теореме 2.1 имеем

$$\lim_{x\to 0} cos\left(\sin x / x\right) = cos\left(\lim_{x\to 0}\sin x / x\right) = cos\, 1.$$

Определение 2.3. Функции вида

$$c = const, \sqrt[n]{x}, x^{\alpha}\ \left(\alpha \in R\right), a^x, log_a x\left(a > 0, a \neq 1\right), sin\ x, \cos\ x,$$

$$arcsinx, arccosx, arctgx, arcctgx$$

называются *простейшими элементарными функциями*. Всякая функция, полученная из простейших элементарных функций путем применения к ним *конечного числа операций* сложения, вычитания, умножения, деления и взятия функций от функций (т. е. образования сложных функций) называется *элементарной функцией (общего вида)*.

Имеет место следующая замечательная теорема.

Теорема 2.3. *Всякая элементарная функция* $f(x)$ *непрерывна в любой внутренней точке своей области определения* $D = D(f)$.

Напомним, что точка $x = x_0$ называется *внутренней точкой множества* $D,$ если она входит в D вместе с некоторой своей окрестностью $U_{x_0}(\delta)$.

Например, функция $f(x) = \dfrac{\ln\left(\sqrt{x+1}\right)}{x-1}$ непрерывна на множестве $D = \left(x > -1, x \neq 1\right),$ так как это множество является областью определения функции $f(x)$ и все точки этого множества — внутренние.

Если хотя бы одно из условий определения 2.2 не выполнено, то функция $f(x)$ называется *разрывной в точке* $x = x_0$. Различают два типа разрывов:

Точка $x = x_0$ **— точка *разрыва I рода,*** если:

а) существуют $f(x_0)$ и конечные односторонние пределы $f(x_0 \pm 0)$, но либо они не совпадают, либо хотя бы один из них не равен значению $f(x_0)$;

б) существуют конечные односторонние пределы $f(x_0 \pm 0)$, но $f(x)$ не определена в точке $x = x_0$. [2]

Точка $x = x_0$ **— точка *разрыва II рода:*** если либо не существует хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0 \pm 0)$, либо хотя бы один из них равен бесконечности.

Например, точка $x = 0$ — точка разрыва I рода для функций

$$f(x) = \frac{\sin x}{x},\ g(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, x > 0, \\ -1, x < 0, \end{cases}$$

а для функции $f(x) = \sin 1/x$ она является точкой разрыва II рода.

Если $\lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = \pm\infty$, то прямая $x = x_0$ — *вертикальная асимптота для функции* $y = f(x)$. Прямая $y = kx + b$ *называется наклонной (горизонтальной при* $k = 0$*) асимптотой функции* $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to \pm\infty} |f(x) - (kx + b)| = 0$. Нетрудно показать, что если существуют конечные пределы

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx \right),$$

то прямая $y = kx + b$ — асимптота кривой $y = f(x)$. Таким образом, асимптоты функции $y = f(x)$ могут возникнуть при подходе x к точкам разрыва $x = x_0$ второго рода этой функции либо на бесконечности.

2.2а. Задачи с решениями I

Задача 2.1. $\lim_{n \to \infty} \dfrac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^4 + (n-1)^4}$.

Решение. $\lim_{n \to \infty} \dfrac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^4 + (n-1)^4} = \lim_{n \to \infty} \dfrac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^4 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^4}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^4 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^4} = \dfrac{1-1}{1+1} = 0$

Ответ 0.

Задача 2.2. Найти предел $\lim_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^3 + 2n - 1}}{n + 2}$.

---

[2] Если пределы $f(x_0 \pm 0)$ конечны и равны друг другу, но либо они не совпадают с $f(x_o)$, либо $f(x)$ не определена в точке $x = x_0$, то эту точку называют *точкой устранимого разрыва функции* $f(x)$.

Решение. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}=\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n}}{\dfrac{n+2}{n}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}}}{1+\dfrac{2}{n}}=1.$

Ответ 1.

Задача 2.3. Найти предел $\lim_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$.

Решение. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}=\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!\cdot(n+3)}{(n+3)!}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+2}=0.$

Ответ 0.

Задача 2.4. Найти предел $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$.

Решение. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}}{\dfrac{1\cdot\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{3}}}=\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{3^n}}\right)=\dfrac{4}{3}.$

Ответ $\dfrac{4}{3}$.

Задача 2.5. Найти предел $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1-2+3-4+\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-2+3-4+\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+3+\ldots+(2n-1)-2\cdot(1+2+\ldots+n)}{\sqrt{n^2+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1+2n-1}{2}\cdot n-2\cdot\frac{1+n}{2}\cdot n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{\sqrt{n^2+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=-1.$$

Ответ -1.

Задача 2.6. Найти предел $\lim_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$.

Решение. $\lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{x^2-3}{x^4+x^2+1} = \frac{3-3}{9+3+1} = 0.$

Ответ 0.

Задача 2.7. Найти предел $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x(x-2)^2} - \frac{1}{x^2-3x+2}\right)$.

Решение.

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x(x-2)^2} - \frac{1}{x^2-3x+2}\right) = \left|\infty-\infty\right| == \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x(x-2)^2} - \frac{1}{(x-2)(x-1)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{-x^2+3x-1}{x(x-1)(x-2)^2} = \infty.$$

Ответ ∞.

Задача 2.8. Найти предел $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3+x}{x^4}}{\frac{x^4-3x^2+1}{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}} = 0.$$

Ответ 0.

Задача 2.9. Найти предел $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x^2\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)} == \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \infty.$$

Ответ ∞.

Задача 2.10. Найти предел $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\left(\sqrt{x^2+16}-4\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{x^2\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+16}+4}{\sqrt{x^2+1}+1} = 4.$$

Ответ 4.

Задача 2.11. Найти предел $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos x-\sin x)\cdot(\cos x+\sin x)}{\cos 2x\cdot(\cos x+\sin x)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos 2x\cdot(\cos x+\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x}{\cos 2x\cdot(\cos x+\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos x+\sin x}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ответ $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Задача 2.12. Найти предел $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}=\left[1^\infty\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2-1}{2}}\right)^{\frac{2x^2}{x^2-1}}=e^2.$$

Ответ e^2.

Задача 2.13. Найти предел $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^x$.

Решение. Так как $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+1}{x-1}=2$, то получим:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^x=0;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^x=+\infty.$$

Ответ: при $x\to-\infty$ предел равен 0; при $x\to+\infty$ предел равен $+\infty$.

До сих пор пределы вычислялись с помощью некоторых преобразований. Покажем, как можно применить таблицу эквивалентных малых. При вычислении предела отношения двух бесконечно малых функций мы можем заменить эти функции их эквивалентными выражениями[3].

Задача 2.14. Найти предел $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{\sin 3x}$.

Решение. Используем формулы:

$$\ln(1+\alpha)\sim\alpha,\quad \sin\alpha\sim\alpha.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{3x}=\frac{4}{3}.$$

Задача 2.15. Найти предел $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$.

Решение. Поскольку $\sqrt[3]{1+x}\sim 1+\frac{x}{3}$, то предел можно переписать в

[3] Приведенные ниже задачи взяты из сайта Math24.ru.

следующем виде:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{3}}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{x}{3}-1}{x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{x}{x}=\frac{1}{3}.$$

Задача 2.16. Найти предел $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1-\cos(1-\cos t)}{\sin^2 t^2}$.

Решение. Известно, что $\cos t\sim1-\dfrac{t^2}{2}$ и $\sin t\sim t$ при $t\to0$. Следовательно,

$$\lim_{t\to0}\frac{1-\cos(1-\cos t)}{\sin^2 t^2}=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos\left(1-1+\frac{t^2}{2}\right)}{\left(\sin t^2\right)^2}=$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos\frac{t^2}{2}}{\left(t^2\right)^2}=\lim_{t\to0}\frac{1-\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2}\right)^2\right]}{t^4}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{t^4}{8}}{t^4}=\frac{1}{8}.$$

Задача 2.17. Найти предел $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2x+3x^2}-1}{x}$.

Решение. Заменяя квадратный корень на эквивалентную бесконечно малую функцию, получаем

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x+3x^2}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{2x+3x^2}{2}-1}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{2x+3x^2}{x}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}(2+3x)=\frac{1}{2}\cdot2=1.$$

Задача 2.18. Найти предел $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln(\ln x)}{x-e}$.

Решение. Применим формулу $\ln(1+\alpha)\sim\alpha$ при $\alpha\to0$. В результате предел преобразуется следующим образом:

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln(\ln x)}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\ln(\ln x+1-1)}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\ln\left[1+(\ln x-1)\right]}{x-e}=$$

$$=\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\ln x-\ln e}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\ln\frac{x}{e}}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\ln\left[1+\left(\frac{x}{e}-1\right)\right]}{x-e}=$$

$$=\lim_{x\to e}\frac{\frac{x}{e}-1}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\frac{x-e}{e}}{x-e}=\frac{1}{e}\lim_{x\to e}\frac{x-e}{x-e}=\frac{1}{e}.$$

Задача 2.19. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}$.

Решение. Заменим переменную: $x-\pi=y$. Здесь $y\to 0$, если $x\to\pi$. Тогда предел равен

$$L=\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}=\lim_{y\to 0}\frac{1+\cos(y+\pi)}{y^2}.$$

Применяя формулу приведения $\cos(y+\pi)=-\cos y$, получаем

$$L=\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{y^2}.$$

Наконец, заменяя косинус эквивалентным бесконечно малым выражением $1-\cos y\sim\dfrac{y^2}{2}$, находим предел:

$$L=\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{y^2}{2}}{y^2}=\frac{1}{2}.$$

Задача 2.20. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\log_2 x-1}{x-2}$.

Решение. Используя эквивалентное бесконечно малое выражение для логарифма: $\ln(1+\alpha)\sim\alpha$ при $\alpha\to 0$, получаем

$$\lim_{x\to 2}\frac{\log_2 x-1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\log_2 x-\log_2 2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\log_2\frac{x}{2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{\ln(x/2)}{\ln 2}}{x-2}=$$

$$=\frac{1}{\ln 2}\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x/2)}{x-2}=$$

$$=\frac{1}{\ln 2}\lim_{x\to 2}\frac{\ln\left[1+\left(\frac{x}{2}-1\right)\right]}{x-2}=\frac{1}{\ln 2}\lim_{x\to 2}\frac{\frac{x}{2}-1}{x-2}=\frac{1}{2\ln 2}\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x-2}=\frac{1}{2\ln 2}.$$

Задача 2.21. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^4-1}$.

Решение. Пусть $x-1=t$. Тогда $t\to 0$ при $x\to 1$. Предел становится равным

$$L=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^4-1}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{(t+1)^4-1}.$$

Далее используем алгебраическое тождество

$$(t+1)^4=t^4+4t^3+6t^2+4t+1$$

и находим предел

$$L=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{(t+1)^4-1}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\left(t^4+4t^3+6t^2+4t+1\right)-1}=\left[\sin t\sim t\right]=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{t\left(t^3+4t^2+6t+4\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^3+4t^2+6t+4}=\frac{1}{4}.$$

Задача 2.22. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$.

Решение. Используем следующие эквивалентные выражения для бесконечно малых функций:

$$\sqrt[k]{1+\alpha}\sim 1+\frac{\alpha}{k},\ \ \ln(1+\alpha)\sim\alpha \ \text{ïðè}\ \alpha\to 0.$$

Тогда предел можно записать в виде

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+(\cos x-1)\right]}{\left(1+\dfrac{x^2}{3}\right)-1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2/3}=-3\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Заменяя $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$, получаем окончательный ответ

$$L=-3\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=-3\lim_{x\to 0}\frac{x^2/2}{x^2}=-\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=-\frac{3}{2}.$$

Задача 2.23. Вычислить предел $\lim\limits_{t\to a}\left(\dfrac{\sin t}{\sin a}\right)^{\frac{1}{t-a}}$.

Решение. Сделаем замену переменной: $t-a=y$, $\Rightarrow y\to 0$ при $t\to a$. Тогда предел через новую переменную y записывается в виде

$$L=\lim_{t\to a}\left(\frac{\sin t}{\sin a}\right)^{\frac{1}{t-a}}=\lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin(y+a)}{\sin a}\right)^{\frac{1}{y}}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin y\cos a+\cos y\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{1}{y}}=\lim_{y\to 0}\left(\cos y+\sin ya\right)^{\frac{1}{y}}.$$

Заменим функции косинус и синус их эквивалентными бесконечно малыми выражениями по формулам $\cos y\sim 1-\dfrac{y^2}{2}$, $\sin y\sim y$. Предел становится равным

$$L=\lim_{y\to 0}\left(\cos y+\sin ya\right)^{\frac{1}{y}}=\lim_{y\to 0}\left(1-\frac{y^2}{2}+ya\right)^{\frac{1}{y}}.$$

Мы ограничимся учетом бесконечно малых первого порядка малости и пренебрежем бесконечно малыми второго порядка $\frac{y^2}{2}$. В результате, получаем окончательный ответ

$$L=\lim_{y\to 0}\left(1-\frac{y^2}{2}+ya\right)^{\frac{1}{y}}=\lim_{y\to 0}(1+ya)^{\frac{1}{y}}=\lim_{y\to 0}(1+ya)^{\frac{a}{ya}}=$$

$$=\left[\lim_{ya\to 0}(1+ya)^{\frac{1}{ya}}\right]^a=e^a.$$

ТЕХНИКА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ. Задачи из типового расчета

Вычислить пределы последовательностей, заданных своими общими членами.

$$1.16.\ \frac{(2n+7)^3-(2+2n)^3}{(6n+2)^2+(8n+1)^2}.\quad 1.17.\ \frac{(2n+6)^3-(2n+1)^3}{(6n-1)^2+2(8n-3)^2}.$$

$$1.18.\ \frac{(3n+7)^3-(2+3n)^3}{2(9n+2)^2+(12n+1)^2}.$$

$$1.19.\ \frac{(2+3n)^4-(3n-2)^4}{(3n+5)^2+(3n-5)^2}.\quad 1.20.\ \frac{(7n+2)^4-(7n-2)^4}{(7n+5)^2+(2n-5)^4}.$$

Ответы {1.16}. 3/5. {1.17.} 15/41. {1.18.} 15/34. {1.19.} ∞. {1.20.} 0.

Решение 1.16.

$$\boxed{\begin{gathered}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+7)^3-(2+2n)^3}{(6n+2)^2+(8n+1)^2}=\left(\frac{\infty-\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{12n^2+54n+67}{20n^2+8n+1}=\\=\lim_{n\to\infty}\frac{12+\frac{54}{n}+\frac{67}{n^2}}{20+\frac{8}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}.\end{gathered}}$$

$$2.16.\ \frac{\sqrt{(2n-2)^3}-\sqrt{(2n-3)(2n-4)(2n-6)}}{\sqrt{2n-3}}.$$

$$2.17.\ 2\sqrt{2n^3+2}\left(\sqrt{8n^3+2}-\sqrt{8n^3-1}\right).$$

$$2.18.\ 2\sqrt{125n^3+8}\left(\sqrt{125n^3+2}-\sqrt{125n^3-1}\right).2.19.$$

$$3\sqrt{27n^3+8}\left(\sqrt{27n^3+2}-\sqrt{27n^3-1}\right).$$

2.20. $$5\sqrt{343n^3+8}\left(\sqrt{343n^3+2}-\sqrt{343n^3-1}\right).$$

Ответы. { 2.16.} 7/2. { 2.17.} 3/2 {2.18.} 3. { 2.19.} 9/2. { 2.20.} 15/2.

Решение 2.17.

$$\lim_{n\to\infty}2\sqrt{2n^3+2}\left(\sqrt{8n^3+2}-\sqrt{8n^3-1}\right)=\left(\infty\left(\infty-\infty\right)\right)=$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\sqrt{2n^3+2}\,\frac{\left(\sqrt{8n^3+2}-\sqrt{8n^3-1}\right)\left(\sqrt{8n^3+2}+\sqrt{8n^3-1}\right)}{\sqrt{8n^3+2}+\sqrt{8n^3-1}}=$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\sqrt{2n^3+2}\,\frac{8n^3+2-8n^3+1}{\sqrt{8n^3+2}+\sqrt{8n^3-1}}=6\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^3+2}}{\sqrt{8n^3+2}+\sqrt{8n^3-1}}=$$

$$=6\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2+\frac{2}{n^3}}}{\sqrt{8+\frac{2}{n^3}}+\sqrt{8-\frac{1}{n^3}}}=6\cdot\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}=\frac{3}{2}.$$

Вычислить пределы функций.

3.16. $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{\sqrt[3]{32+x}-\sqrt[3]{22-x}}{\sqrt[3]{(5+x)^2}+\sqrt[5]{5+x}}$ .3.17. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt[3]{28+x}-\sqrt[3]{26-x}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[5]{x+1}}$.

3.18. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x+12}-2\sqrt{x}}{(x-1)^2-9}$.

3.19.$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{27+6x}-\sqrt[3]{27-6x}}{\sqrt[3]{36x^2}+\sqrt[5]{6x}}$ .3.20. $\lim\limits_{x\to2/7}\dfrac{\sqrt[3]{28x}-2}{\sqrt{7x+2}-\sqrt{14x}}$.

Ответы. {3.16.} 0. {3.17.} 0. {3.18.} $-1/16$. {3.19.} 0 {3.20.} $-4/3$.

Решение 3.16.

$$\lim_{x\to -5}\frac{\sqrt[3]{32+x}-\sqrt[3]{22-x}}{\sqrt[3]{(5+x)^2}+\sqrt[5]{5+x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left[x+5=t\to 0, x=t-5\right]=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{32+t-5}-\sqrt[3]{22-t+5}}{\sqrt[3]{t^2}+\sqrt[5]{t}}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{27+t}-\sqrt[3]{27-t}}{\sqrt[3]{t^2}+\sqrt[5]{t}}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{27+t}-\sqrt[3]{27-t}}{\sqrt[15]{t^3}\left(1+\sqrt[15]{t^7}\right)}=$$

$$=3\lim_{t\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+\frac{t}{3}}-1\right)-\left(\sqrt[3]{1-\frac{t}{3}}-1\right)}{\sqrt[15]{t^3}\left(1+\sqrt[15]{t^7}\right)}\wedge=3\left(\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{t}{3}}-1}{\sqrt[15]{t^3}\left(1+\sqrt[15]{t^7}\right)}-\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-\frac{t}{3}}-1}{\sqrt[15]{t^3}\left(1+\sqrt[15]{t^7}\right)}\right)=.$$

$$=\left[\sqrt[3]{1+u}-1\sim\frac{1}{3}u, u\to 0\right]=3\left(\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{9}}{\sqrt[15]{t^3}\left(1+\sqrt[15]{t^7}\right)}-\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{t}{9}}{\sqrt[15]{t^3}\left(1+\sqrt[15]{t^7}\right)}\right)=0.$$

Решение 3.18.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+12}-2\sqrt{x}}{(x-1)^2-9}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left[x-4=t\to 0, x=4+t\right]=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t+16}-2\sqrt{4+t}}{(t+3)^2-9}=4\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+\frac{t}{16}}-\sqrt{1+\frac{t}{4}}}{(t+6)t}=4\lim_{t\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+\frac{t}{16}}-1\right)-\left(\sqrt{1+\frac{t}{4}}-1\right)}{(t+6)t}\wedge=$$

$$\wedge=4\left(\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+\frac{t}{16}}-1}{(t+6)t}-\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+\frac{t}{4}}-1}{(t+6)t}\right)=4\left(\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{32}}{(t+6)t}-\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{8}}{(t+6)t}\right)=$$

$$=4\left(\frac{1}{32\cdot 6}-\frac{1}{8\cdot 6}\right)=-\frac{1}{16}.$$

4.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{192x^2-40x}{\sin(24x)}$. 4.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(5x)}{\cos(35x)-\cos(15x)}$. 4.18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{8x}-1}{\ln(1+16x)}$.

4.19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9}{4}\dfrac{\ln(1-24x)}{(36x)}$. 4.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-36x}-1}{\sin\left(\pi\left(-\frac{9}{2}\mathrm{x}+1\right)\right)}$.

Ответы. {4.16.} $-5/3$. {4.17.} $-1/40$. {4.18.} $0,5\cdot\ln 2$. {4.19.} $-3/2$. { 4.20. } $-8/\pi$.

Решение 4.19.

$$\lim_{x\to 0}\frac{9}{4}\frac{\ln(1-24x)}{arctg(36x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left[\ln(1+u)\sim u, arctgu\sim u, u\to 0\right]=$$
$$=\frac{9}{4}\lim_{x\to 0}\frac{-24x}{36x}=-\frac{9}{4}\cdot\frac{24}{36}=-\frac{3}{2}.$$

Решение 4.20.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-36x}-1}{\sin\left(\pi\left(-\frac{9}{2}x+1\right)\right)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-36x}-1}{\sin\left(\pi-\frac{9\pi x}{2}\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-36x}-1}{\sin\left(\frac{9\pi x}{2}\right)}=\left[e^u-1\sim u,\sin u\sim u, u\to 0\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-36x}{\frac{9\pi x}{2}}=-\frac{8}{\pi}.$$

5.16. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{7^{16x}-5^{24x}}{16x-(24x)}$.5.17. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{-30x}-2^{-6x}}{-6x+\sin(54x)}$.

5.18. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4^{-45x}-9^{18x}}{-\sin(9x)+tg(729x^3)}$.

5.19. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4^{-30x}-9^{12x}}{-\sin(6x)+tg(216x^3)}$.5.20.$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-10x}-e^{20x}}{-10x+\sin(100x^2)}$.

Ответы. 5.16. $-2\ln(7)+3\ln(5)$. 5.17. $-\frac{5}{8}\ln(3)+\frac{1}{8}\ln(2)$. 5.18. $10\ln(2)+4\ln(3)$. 5.19. $10\ln(2)+4\ln(3)$. 5.20. 3.

Решение 5.18.

$$\lim_{x\to 0}\frac{4^{-45x}-9^{18x}}{-\underbrace{\sin(9x)}_{\sim 9x}+\underbrace{tg(729x^3)}_{7\sim 29x^3}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{4^{-45x}-9^{18x}}{-9x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(4^{-45x}-1\right)-\left(9^{18x}-1\right)}{-9x}\wedge=\lim_{x\to 0}\frac{\left(4^{-45x}-1\right)}{-9x}-\lim_{x\to 0}\frac{\left(9^{18x}-1\right)}{-9x}=$$
$$=\left[a^u-1\sim u\ln a, u\to 0\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-45x\ln 4}{-9x}-\lim_{x\to 0}\frac{18x\ln 9}{-9x}=5\ln 4+2\ln 9.$$

Решение 5.20.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-10x}-e^{20x}}{-10x+\sin(100x^2)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-10x}\left(1-e^{30x}\right)}{-10x+\sin(100x^2)}=$$
$$=\left[e^u-1\sim u, u\to 0, -10x+\sin(100x^2)\sim -10x, x\to 0\right]=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-e^{-10x}30x}{-10x}=\frac{30}{10}=3.$$

$$6.16.\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{-5x+2}{3+5x}\right)^{-5x}.\ 6.17.\ \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{9}\frac{e^{-27x}-1}{x}\right)^{\cos\left(-\frac{1}{4}\pi+9x\right)^2}.$$

$$6.18.\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{25x^2+4}{-5x+2}\right)^{25x^2+3}.$$

$$6.19.\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{121x^2+4}{-11x+2}\right)^{121x^2+3}.\ 6.20.\ \lim_{x\to 0}\left(6-\frac{5}{\cos(7x)}\right)^{\mathrm{tg}^2(7x)}.$$

Ответы. {6.16.} 1. {6.17.} $\sqrt{3}$. {6.18.} 8. {6.19.} 8. {6.20.} 1.

Решение 6.16.

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(6-\frac{5}{\cos(7x)}\right)^{\mathrm{tg}^2(7x)}=\left(1^0\right)=1.}$$

Решение 6.17.

$$\boxed{\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{9}\frac{e^{-27x}-1}{x}\right)^{\cos\left(-\frac{1}{4}\pi+9x\right)^2}=\left[e^u-1\sim u, u\to 0\right]=\\&=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{9}\frac{-27x}{x}\right)^{\cos^2\left(-\frac{1}{4}\pi+9x\right)}=3^{\cos^2\frac{\pi}{4}}=\sqrt{3}.\end{aligned}}$$

$$7.16.\ \lim_{x\to -2/5}\left(\frac{\cos(5x)}{\cos(2)}\right)^{\frac{1}{-5x-2}}.\ 7.17.\ \lim_{x\to -1/8}\left(2e^{-8x-1}-1\right)^{-\frac{8x}{-8x-1}}.$$

$$7.18.\ \lim_{x\to -1/6}\left(2e^{-12x-2}-1\right)^{\frac{-36x+2}{-12x-2}}.$$

$$7.19.\ \lim_{x\to -2/13}\left(-\frac{1}{13}\frac{2+13x}{x}\right)^{\frac{1}{\ln(2+13x)}}.\ 7.20.\ \lim_{x\to -1/15}\left(2e^{-15x-1}-1\right)^{-\frac{15x}{-15x-1}}.$$

Ответы. {7.16.} $e^{-tg\,2}$. {7.17.} e^2. {7.18.} e^{16}. {7.19.} e. {7.20.} e^2.

Решение 7.17.

$$A=\lim_{x\to-1/8}\left(2e^{-8x-1}-1\right)^{-\frac{8x}{-8x-1}}=\left(1^{\infty}\right)=e^{\lim\limits_{x\to-1/8}\left(\frac{8x}{8x+1}\right)\ln\left(2e^{-8x-1}-1\right)};$$

$$\lim_{x\to-1/8}\left(\frac{8x}{8x+1}\right)\ln\left(2e^{-8x-1}-1\right)=$$

$$=\left(\infty\cdot0\right)=\lim_{x\to-1/8}\left(\frac{8x}{8x+1}\right)\ln\left(1+\underbrace{\left(2e^{-8x-1}-2\right)}_{u}\right)=$$

$$=\left[\ln\left(1+u\right)\sim u,u\to0\right]=\lim_{x\to-1/8}\left(\frac{8x}{8x+1}\right)\left(2e^{-8x-1}-2\right)=$$

$$=2\lim_{x\to-1/8}\left(\frac{8x}{8x+1}\right)\left(e^{-8x-1}-1\right)=$$

$$=\left[e^{u}-1\sim u,u\to0\right]=2\lim_{x\to-1/8}\left(\frac{8x}{8x+1}\right)\left(-8x-1\right)=2\cdot8\cdot\left(\frac{1}{8}\right)=2\Rightarrow A=e^{2}.$$

Решение 7.19.

$$A=\lim_{x\to-2/13}\left(-\frac{2+13x}{13x}\right)^{\frac{1}{\ln(2+13x)}}=\left(0^{\infty}\right)=e^{\lim\limits_{x\to-2/13}\frac{1}{\ln(2+13x)}\ln\left(-\frac{2+13x}{13x}\right)};$$

$$\lim_{x\to-2/13}\frac{\ln\left(-\dfrac{2+13x}{13x}\right)}{\ln\left(2+13x\right)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-2/13}\frac{\ln\left(2+13x\right)-\ln\left(-13x\right)}{\ln\left(2+13x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-2/13}\left[1-\frac{\ln\left(-13x\right)}{\ln\left(2+13x\right)}\right]=1-\frac{\ln2}{\infty}=1\Rightarrow A=e.$$

8.2. Вычислить пределы функций.

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sqrt{5\sin2x+\left(2x-\pi\right)\sin\dfrac{7x}{2x-\pi}}$. 3) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}3x}+\left(4x-\pi\right)\cos\dfrac{5x}{4x-\pi}}{\ln\left(2+\operatorname{tg}x\right)}$.

4) $\lim\limits_{x\to-2}\sqrt{\dfrac{1+\cos\pi x}{4+\left(2x+4\right)\sin\dfrac{3x}{x+2}}}$. 5) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{5\cos2x+\sin\dfrac{5}{3x}\cdot\ln\left(1+7x\right)}$.

Решение 8.2(3).

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sqrt[3]{\mathrm{tg}3x}+(4x-\pi)\cos\dfrac{5x}{4x-\pi}}{\ln(2+\mathrm{tg}x)}=$$

$$=\left[(4x-\pi)\cos\frac{5x}{4x-\pi}=o(1)\cdot O(1)=o(1),\, x\to\pi/4\right]=$$

$$=\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sqrt[3]{\mathrm{tg}3x}+o(1)}{\ln(2+\mathrm{tg}x)}=\frac{\sqrt[3]{\mathrm{tg}\dfrac{3\pi}{4}}}{\ln\left(2+\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4}\right)}=\frac{-1}{\ln 3}.$$

Рекомендуем ответить на теоретические вопросы и теоретические упражнения, касающиеся изложенной темы, в типовом расчёте «Пределы».