Лекция 4. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора и ее применения. Правило Лопиталя

4.1. Логарифмическая производная

При дифференцировании показательно-степенной функции $y=\left[u(x)\right]^{v(x)}$ обычно используют основное логарифмическое тождество $(A=e^{\ln A}, A>0)$ или *логарифмическую производную* $\left(\ln f(x)\right)'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$. Делается это так (первый способ):

$$y=\left[u(x)\right]^{v(x)}\equiv e^{\ln\left[u(x)\right]^{v(x)}}=e^{v(x)\ln\left[u(x)\right]}\Leftrightarrow y'=\left(e^{v(x)\ln\left[u(x)\right]}\right)'=$$

$$=e^{v(x)\ln\left[u(x)\right]}\cdot\left(v(x)\ln\left[u(x)\right]\right)'=\left[u(x)\right]^{v(x)}\cdot\left(v'(x)\ln\left[u(x)\right]+v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}\right);$$

или так (второй способ):

$$y=\left[u(x)\right]^{v(x)}\Rightarrow\ln y=v\ln u\Rightarrow\frac{y'}{y}=(v\ln u)'\Rightarrow y'=y(v\ln u)'\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y'=u^v(v\ln u)'=u^v\left(v'\ln u+v\frac{u'}{u}\right).$$

, $$\left(\left(x^2+1\right)^{x^3}\right)'=\left(e^{x^3\ln\left(x^2+1\right)}\right)'=e^{x^3\ln\left(x^2+1\right)}\times\left(x^3\ln\left(x^2+1\right)\right)'=\left(x^2+1\right)^{x^3}\cdot\left(3x^2\ln\left(x^2+1\right)+x^3\cdot\frac{2x}{x^2+1}\right).$$

Решим этот пример вторым способом:

$$y=y(x)=\left(x^2+1\right)^{x^3}\Rightarrow\ln y=x^3\ln\left(x^2+1\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{y'}{y}=\left(x^3\ln\left(x^2+1\right)\right)'=3x^2\ln\left(x^2+1\right)+x^3\frac{2x}{x^2+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=y\left(3x^2\ln\left(x^2+1\right)+\frac{2x^4}{x^2+1}\right)=$$

$$=\left(x^2+1\right)^{x^3}\left(3x^2\ln\left(x^2+1\right)+\frac{2x^4}{x^2+1}\right).$$

4.2. Производные и дифференциалы высших порядков

Производная $f'(x)$ сама является функцией от $x,$ поэтому можно взять от нее производную. Полученная таким образом функция (если она существует) называется второй производной от функции $y=f(x)$ и обозначается $f''(x)\equiv\left(f'(x)\right)'=y_{xx}(x)$. И вообще: *если известна производная* $(n-1)$*-го порядка* $f^{(n-1)}(x)$, *то производная* n*-го порядка определяется так:* $f^{(n)}(x)\equiv\left(f^{(n-1)}(x)\right)'$; *при этом функция* $y=f(x)$ *называется* n *раз дифференцируемой в точке* $x.$

Аналогично определяются дифференциалы высшего порядка. Именно: *если известен дифференциал* $d^{n-1}f(x)$ $(n-1)$*-го порядка, то дифференциал* n*-го порядка определяется так:* $d^n f(x)=d\left(d^{n-1}f(x)\right)$; *при этом дифференциал* $dx=\Delta x$ *независимой переменной и все его степени* $(dx)^k\equiv dx^k$ *считаются постоянными дифференцирования.*

Имеем $d^2y=d(dy)=d\left(f'(x)dx\right)=\left(f'(x)\right)'\cdot dx\cdot dx=f''(x)dx^2.$ И вообще, справедливо утверждение: *если функция* $y=f(x)$ *дифференцируема* n *раз в точке* $x,$ *то*

$$d^n y=f^{(n)}(x)dx^n.$$

Нетрудно доказать следующее утверждение.

Теорема 3.1. *В области определения выписанных ниже функций справедливы равенства:*

$$\boxed{\begin{array}{l}1^0)\left(x^\alpha\right)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}\,(\alpha=\mathrm{const}),\\ 2^0)\left(a^x\right)^{(n)}=\left(\ln^n a\right)\cdot a^x\left(a_{\neq1}^{>0}=\mathrm{const}\right),\left(e^x\right)^{(n)}=e^x,\\ 3^0)(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right),(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right).\end{array}}$$

Докажем,например, формулу 2^0. При $n=1$ формула 2^0 верна. Пусть она верна при $n=k,$ т. е. имеет место равенство $\left(a^x\right)^{(k)}=a^x\ln^k a.$ Покажем истинность формулы 2^0 при $n=k+1.$ Имеем $\left(a^x\right)^{(k+1)}=\left(\left(a^x\right)^{(k)}\right)'=\left(a^x\ln^k a\right)'=a^x\ln a\cdot\ln^k a=a^x\ln^{k+1}a.$ Таким образом, по индукции формула 2^0 верна при всех $n.$

Производные n-го порядка являются линейными операциями, т. е.

$$\left(C_1u(x)+C_2v(x)\right)^{(n)}=C_1u^{(n)}(x)+C_2v^{(n)}(x)\left(C_1,C_2=\mathrm{const}\right).$$

Производная n-го порядка для произведения uv двух функций вычисляется довольно сложно. По индукции можно показать, что справедлива следующая

Формула Лейбница. *Если функции* $u=u(x), v=v(x)$ *диффе- ренцируемы n раз в точке* x, *то имеет место равенство*

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}=$$
$$=u^{(n)}v+C_n^1u^{(n-1)}v'+C_n^2u^{(n-2)}v''+\ldots+C_n^{n-1}u'v^{(n-1)}+uv^{(n)}.(3.1)$$

Здесь: $C_n^k=\dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)\ldots3\cdot2\cdot1}$ *— число сочетаний*[1] *из* n *элементов по* k, *нулевая производная функции* $g(x)$ *совпадает с ней самой:* $g^{(0)}\equiv\ \equiv g(x)$.

Легко видеть, что формула (3.1) напоминает формулу бинома Ньютона; только в ней вместо произведения степеней $u^m v^n$ стоит произведение производных $u^{(m)}v^{(n)}$. Учитывая это, легко записать, например, третью производную от произведения:

$$(uv)'''=[(u+v)^3=u^3v^0+3u^2v^1+3u^1v^2+u^0v^3]=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv'''.$$

Задача 3.2. Вычислить $\left(x^2\sin x\right)^{(100)}$.

Решение. По формуле 3.1 имеем

$$\left(x^2\sin x\right)^{(100)}\equiv\left((\sin x)\cdot x^2\right)^{(100)}=$$
$$=\left[u=\sin x, v=x^2\right]=(\sin x)^{(100)}x^2+C_{100}^1(\sin x)^{(99)}\left(x^2\right)'+$$
$$+C_{100}^2(\sin x)^{(98)}\left(x^2\right)''+C_{100}^2(\sin x)^{(97)}\left(x^2\right)'''+\ldots+C_{100}^{100}(\sin x)\left(x^2\right)^{(100)}.$$

Здесь все слагаемые, начиная с четвёртого, равны нулю, поэтому

$$\left(x^2\sin(x)\right)^{(100)}=\sin\left(x+100\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot x^2+100\sin\left(x+99\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot2x+$$
$$+\frac{100\cdot99}{2!}\cdot\sin\left(x+98\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot2=x^2\sin(x)-200x\cos(x)-9900\sin(x).$$

4.3. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши. Формула Тейлора с остаточными членами в форме Пеано и Лагранжа

Введем следующее понятие: функция $f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a,b]$, если она непрерывна в любой точке интервала (a,b) и если

---

[1] Полезно знать, что $C_n^k=C_n^{n-k}, C_n^1=n$ и что $0!=1$ (по определению).

$f(a+0)=f(a), f(b-0)=f(b)$.

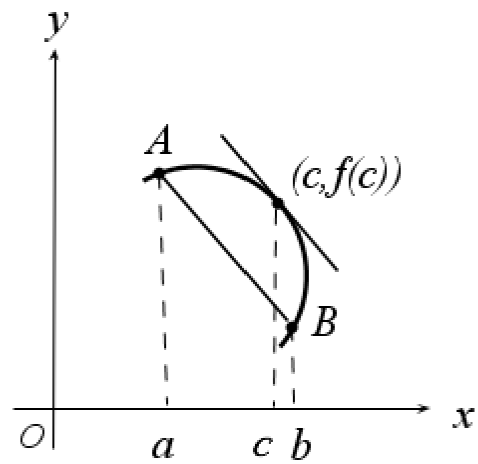

Рис. 3.1

Теорема Ролля. *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$, *дифференцируема по-крайней мере в интервале* (a,b) *и на концах отрезка* $[a,b]$ *принимает равные значения:* $f(a)=f(b)$. *Тогда существует точка* $c\in(a,b)$ *такая, что* $f'(c)=0$.

Теорема Лагранжа. *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$ *и дифференцируема по-крайней мере в интервале* (a,b). *Тогда существует точка* $c\in(a,b)$ *такая, что*

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Leftrightarrow f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

Теорема Коши. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны на отрезке* $[a,b]$ *и дифференцируемы по-крайней мере в интервале* (a,b). *Пусть, кроме того,* $g'(x)\neq 0$ *для всех* $x\in(a,b)$. *Тогда существует точка* $c\in(a,b)$ *такая, что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Заметим, что во всех этих теоремах точку $c\in(a,b)$ можно записать в виде $c=x_0+\theta(x-x_0)(\theta\in(0,1))$ и таких точек может быть несколько. Геометрический смысл этих теорем очевиден: в теореме Ролля утверждается существование горизонтальной касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $(c,f(c))$, а в теореме Лагранжа — существование касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $(c,f(c))$, параллельной секущей, проходящей через точки $A(a,f(a))$ и $B(b,f(b))$ (рис. 3.1). Эти теоремы часто применяются в различных исследованиях (например, теорема Коши применяется при выводе правила Лопиталя; см. далее).

Дадим **доказательство** только теоремы Лагранжа.

Составим вспомогательную функцию

$$F(x)=\left[f(b)-f(a)\right]\cdot x-(b-a)\cdot f(x).$$
Эта функция непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема в интервале (a,b) (как линейная комбинация функций x и $f(x)$). Кроме того,
$$F(a)=\left[f(b)-f(a)\right]a-(b-a)f(a)=af(b)-bf(a),$$
$$F(b)=\left[f(b)-f(a)\right]b-(b-a)f(b)=af(b)-bf(a),$$

т. е. $F(a)=F(b)$. Таким образом, функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, и значит, существует точка $c\in(a,b)$ такая, что
$$F'(c)=0\Leftrightarrow\left[f(b)-f(a)\right]-(b-a)f'(c)=0\Leftrightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$
Теорема доказана.

При вычислении пределов функций мы использовали таблицу эквивалентных бесконечно малых. Однако этих формул не достаточно для вычисления предела
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}.(3.2)$$
Нужны более точные формулы или так называемые *асимптотические разложения высших порядков.* Переходя к описанию таких разложений, введем следующее понятие.

Определение 3.1. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки $x=x_0$. Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке $x=x_0$ *асимптотическое разложение* n *-го порядка,* если существуют числа $A_j\left(j=\overline{0,n}\right)$ такие, что $f(x)$ в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}_{x_0}(\delta)$ представляется в виде
$$f(x)=A_0+A_1(x-x_0)+\ldots+A_n(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right).(3.3)$$
Здесь $o\left((x-x_0)^n\right)=(x-x_0)^n\cdot o(1)(x\to x_0)$.

Теорема 3.2. *Пусть функция* $f(x)$ *имеет в точке* $x=x_0$ *производные* $f^{(0)}(x_0)\equiv f(x_0), f'(x_0),\ldots,f^{(n)}(x_0)$ *до* n *-го порядка включительно. Тогда* $f(x)$ *имеет в точке* $x=x_0$ *асимптотическое разложение* n *-го порядка вида*[2]

---

[2] Формулу (3.4) называют *формулой Тейлора с остаточным членом* $o\left((x-x_0)^n\right)$ *в форме Пеано или локальной формулой Тейлора.*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o\left((x-x_0)^n\right)\equiv$$
$$\equiv f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+ \quad (3.4)$$
$$+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right)(x\to x_0)$$

Доказательство. Сначала дадим обоснование общего утверждения: *для любой функции* $r(x)$, *имеющей в точке* $x=x_0$ *производную* n *-го порядка* $r^{(n)}(x_0)$, *имеет место высказывание*

$$\left\{r(x_0)=r'(x_0)=\ldots=r^{(n)}(x_0)=0\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{r(x)=o\left((x-x_0)^n\right)\equiv(x-x_0)^n\cdot o(1)(x\to x_0)\right\}.$$

Применим метод полной индукции. При $n=1$ в силу равенств $r(x_0)=r'(x_0)=0$ имеем

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{r(x)-r(x_0)}{x-x_0}=r'(x_0)=0\Leftrightarrow\frac{r(x)}{x-x_0}=o(1)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow r(x)=o(x-x_0)(x\to x_0),$$

т. е. при $n=1$ указанное высказывание верно. Пусть оно верно при $n=k$, т. е. справедливо высказывание

$$\left\{r(x_0)=r'(x_0)=\ldots=r^{(k)}(x_0)=0\right\}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left\{r(x)=o\left((x-x_0)^k\right)\equiv(x-x_0)^k\cdot o(1)(x\to x_0)\right\}.$$

Покажем, что оно верно и при $n=k+1$. Так как последнее утверждение верно для произвольной функции $r(x)$, то оно верно и для функции $\tilde{r}(x)\equiv r'(x)$, т. е.

$$\left\{\tilde{r}(x_0)=\tilde{r}'(x_0)=\ldots=\tilde{r}^{(k)}(x_0)=0\right\}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left\{\tilde{r}(x)=o\left((x-x_0)^k\right)\equiv(x-x_0)^k\cdot o(1)(x\to x_0)\right\}.(*)$$

Функция $r(x)$ удовлетворяет на отрезке $[x_0,x]$ (или $[x,x_0]$) всем условиям теоремы Лагранжа, поэтому существует точка $c\in(x_0,x)$ (или $c\in(x,x_0)$) такая, что

$$r(x)-r(x_0)=r'(c)(x-x_0)\Leftrightarrow r(x)=r'(c)(x-x_0)(x\to x_0).$$

По предположению индукции для функции $\tilde{r}(x)\equiv r'(x)$ верно высказывание (*), поэтому $r'(c)=o\left((c-x_0)^k\right)$, а значит, для $r(x)$ будем иметь

$$r(x)=o\left((c-x_0)^k\right)(x-x_0)=o\left((x-x_0)^{k+1}\right)(x\to x_0)$$

(здесь учтено, что $o\left((c-x_0)^k\right)=o\left((x-x_0)^k\right)(x\to x_0)$[3]). Значит, наше утверждение верно и при $n=k+1$, а поэтому оно верно при всех n. Перейдём теперь к доказательству формулы (3.4). Составим функцию

$$r(x)=f(x)-f(x_0)-\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)-\ldots-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что для неё выполнены равенства $r(x_0)=r'(x_0)=\ldots=r^{(n)}(x_0)=0$, а значит, по доказанному выше утверждению имеем $r(x)=o\left((x-x_0)^n\right)$, или

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o\left((x-x_0)^k\right)(x\to x_0).$$

Формула (3.4) полностью доказана.

Разложение (3.4) при $x_0=0$, запишется в виде $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n)(x\to 0)$, называемом *формулой Маклорена"– Тейлора.* Приведем ее для основных элементарных функций.

Теорема 3.3. *Имеют место следующие разложения:*

[3] В самом деле, $c-x_0=(x_0+\theta(x-x_0))-x_0=\theta\cdot(x-x_0)$, поэтому $o\left((c-x_0)^k\right)=\theta^k\cdot\left((x-x_0)^k\right)=O(1)\cdot(x-x_0)^k o(1)=(x-x_0)^k o(1)=o\left((x-x_0)^k\right)$.

$$1)\ e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o\left(x^n\right)\equiv 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right)\left(x\to 0\right);$$

$$2)\ \sin x=\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(-1\right)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o\left(x^{2n+1}\right)\equiv$$

$$\equiv x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+\left(-1\right)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+1}\right)\left(x\to 0\right);$$

$$3)\ \cos x=\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(-1\right)^k x^{2k}}{(2k)!}+o\left(x^{2n}\right)\equiv$$

$$\equiv 1-\frac{x^2}{2!}+\ldots+\left(-1\right)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n}\right)\left(x\to 0\right);$$

$$4)\ \ln\left(1+x\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(-1\right)^{k-1}\frac{x^k}{k}+o\left(x^n\right)\equiv$$

$$\equiv x-\frac{x^2}{2}+\ldots+\left(-1\right)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right)\left(x\to 0\right);$$

$$5)\ \left(1+x\right)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)x^2}{2!}+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^n}{n!}+$$

$$+o\left(x^n\right)\left(x\to 0,\alpha=\mathrm{const}\right).$$

Доказательство этих формул базируется на подсчёте производной n-го порядка соответствующей функции. Докажем, например, формулу 2. Итак, пусть $f\left(x\right)=\sin x.$ По теореме 3.1 имеем:

$$f^{(n)}\left(x\right)=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow f\left(0\right)=0, f'\left(0\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,$$

$$f''\left(0\right)=\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

$$f'''\left(0\right)=\sin\left(3\cdot\frac{\pi}{2}\right)=-1,\ldots,$$

$$f^{(n)}\left(0\right)=\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0, n=2k,\\ \cos\pi k=\left(-1\right)^k, n=2k+1.\end{cases}$$

Значит, в формуле

$$f\left(x\right)=\sum_{r=0}^{n}\frac{f^{(r)}\left(0\right)}{r!}x^r+o\left(x^n\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{f^{(2k)}\left(0\right)}{(2k)!}x^{2k}+\frac{f^{(2k+1)}\left(0\right)}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right)+o\left(x^{2n+1}\right)$$

будут отсутствовать все четные степени x, а слагаемые $\frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}x^{2k+1}$ с нечетными степенями имеют вид $\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Следовательно имеет место формула 2.

Замечание 3.1. В формуле п.2) остаточный член можно записать в виде $o\left(x^{2n+2}\right)$, а в формуле п.3) — в виде $o\left(x^{2n+1}\right)$ (почему?).

Теорема 3.2 аппроксимирует функцию $f(x)$ лишь в достаточно малой окрестности точки $x=x_0$. Условия представления функции $f(x)$ по формуле Тейлора на некотором отрезке $[x_0-h, x_0+h]$ (где $h>0$ может быть достаточно большим) описаны в следующем утверждении.

Теорема 3.4. *Пусть функция* $f(x)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) $f(x), f'(x), ..., f^{(n)}(x)$ *существуют и непрерывны на отрезке* $[x_0-h, x_0+h]$;

2) *производная* $f^{(n+1)}(x)$ *существует и конечна по крайней мере на интервале* (x_0-h, x_0+h).

Тогда для всех $x\in[x_0-h, x_0+h]$ *функция* $f(x)$ *представляется в виде*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\equiv$$

$$\equiv f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+ \qquad (3.5)$$

$$+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

где точка $x=c$ *находится между точками* x_0 *и* x $(c=x_0+\theta\times(x-x_0), 0<\theta<1)$.

Формулу (3.5) называют (*глобальной) формулой Тейлора с остаточным членом* $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ *в форме Лагранжа.*

4.4. Применения формулы Тейлора

а) Приближенное вычисление значений функции. Если в формуле (3.4) (или (3.5)) отбросить остаточный член, то получим приближенное значение функции

$$f(x)\approx\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

с точностью до модуля остаточного члена. Если величина $|x-x_0|\ll 1$, то и погрешность этого приближенного равенства будет очень малой. Например, $\sin\frac{1}{2} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0,47493.$ При этом

$$\left|\sin\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{1}{2}\right)^5\right)\right| \le$$

$$\le \left|\frac{\sin^{(6)}\left(\theta\cdot\frac{1}{2}\right)}{6!}\right|\left(\frac{1}{2}\right)^6 \le \frac{1}{2^6 6!} = \frac{1}{46080}.$$

б) Вычисление пределов. Ранее отмечалось, что при вычислении предела $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^3}$ недостаточно формулы эквивалентности $\sin\theta \sim \theta(\theta\to 0)$, так как при использовании этой формулы не исчезает неопределенность. В таких случаях пользуются локальной формулой Тейлора (3.4), записывая в ней столько слагаемых, чтобы стало возможным ликвидировать неопределенность. В нашем примере поступаем так:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3!} + o(1)\right) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

4.5. Правило Лопиталя

Другой способ раскрытия неопределенностей типа $\left(\frac{0}{0}\right)$ **или** $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ **доставляет так *называемое правило Лопиталя*.**

Теорема Лопиталя $\left(\frac{0}{0}\right)$. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *в некоторой проколотой окрестности* $\dot{U}_a = \{0 <| x - a |< \delta\}$ *точки* $x = a$ *удовлетворяют требованиям:*

1) $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывно дифференцирумы в* $\dot{U}_a$;
2) $g'(x) \ne 0 \, \forall x \in \dot{U}_a$;
3) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0.$

Если при этом существует (конечный или бесконечный) предел отношения *производных:* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=P,$ *то и существует равный ему предел отношения самих функций:* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=P.$

Доказательство. Поскольку величина предела $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=P$ не зависит от значений функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке $x=a,$ то можно положить $f(a)=g(a)=0.$ Тогда функции $f(x)$ и $g(x)$ будут непрерывны в окрестности $U_a=\dot{U}_a\cup\{a\}$ (включая и точку $x=a$). Пусть теперь x — произвольная точка проколотой окрестности $\dot{U}_a.$ Тогда на отрезке $[a,x]$ (или $[x,a],$ если $x<a$) функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют всем условиям теоремы Коши, поэтому существует точка $c\in(a,x)$ такая, что $\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)},$ или учитывая, что $f(a)=g(a)=0,$ будем иметь $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}.$ Переходя в этом равенстве к пределу при $x\to a$ (тогда и $c=c(x)\to a$) и учитывая что существует предел $\lim\limits_{c\to a}\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=P,$ получаем равенство $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{c\to a}\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=P.$ Теорема доказана.

Аналогичным способом доказывается следующее утверждение.

Теорема Лопиталя $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right).$ *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *в некоторой проколотой окрестности* $\dot{U}_a=\{0<|x-a|<\delta\}$ *точки* $x=a$ *удовлетворяют требованиям:*

1) $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывно дифференцирумы в* $\dot{U}_a$;

2) $g'(x)\neq 0\,\forall x\in\dot{U}_a$;

3) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty.$

Если при этом существует (конечный или бесконечный) предел отношения производных: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=P,$ *то и существует равный ему предел отношения самих функций:* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=P.$

Например, для рассмотренного ранее предела имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2/2}{3x^2}=\frac{1}{6}.$$

3.6. Задачи с решениями

а) Производная неявной функции

Задача 3.1. Найти $\frac{dy}{dx}$ для данной неявной функции $5x^2+3xy-2y^2+2=0$

Решение. Дифференцируем по x обе части равенства, где y есть функция от x, получим

$$5\cdot 2x+3\left(x'y+xy'\right)-2\cdot 2y\cdot y'=0.$$

Учитывая, что $x'=1$, получаем

$$10x+3y+3xy'-4yy'=0$$

$$y'(3x-4y)=-10x-3y$$

$$y'=\frac{-10x-3y}{3x-4y}=\frac{10x+3y}{4y-3x}$$

б) Логарифмическое дифференцирование

Логарифмическое дифференцирование полезно применять для нахождения производной от показательно-степенной функции $y=u^v$, где u и v — функции от x и когда заданная функция содержит логарифмирующиеся операции (умножения, деления, возведения в степень, извлечение корня).

Задача 3.2. Найти производные следующих функций:

$$1)\quad y=\left(arcctg\,4x\right)^{\frac{1}{x^2}},\ 2)\quad y=\sqrt[4]{\frac{(6x-3)x^3}{\left(1-5x^2\right)^2}}.$$

Решение. Применяется логарифмическое дифференцирование, последовательно находим:

$$1)\quad lny=ln\left(arcctg\,4x\right)^{\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{x^2}\ln(arcctg\,4x),$$

$$\frac{y'}{y}=\left(\frac{1}{x^2}\right)'\ln(arcctg\,4x)+\frac{1}{x^2}\left(\ln(arcctg\,4x)\right)'=$$

$$=-\frac{2}{x^3}\ln(arcctg\,4x)+\frac{1}{x^2}\frac{1}{arcctg\,4x}\left(-\frac{1}{1+16x^2}\right)\cdot 4,$$

$$y'=\left[-\frac{2}{x^3}\ln(arcctg\,4x)-\frac{4}{x^2 arcctg\,4x(1+16x^2)}\right]y,$$

$$y'=\left[-\frac{2}{x^3}\ln(arcctg\,4x)-\frac{4}{x^2 arcctg\,4x(1+16x^2)}\right](arcctg\,4x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

2) $lny=ln\sqrt[4]{\frac{(6x-3)x^3}{\left(1-5x^2\right)^2}}=\frac{1}{4}\ln\frac{(6x-3)x^3}{\left(1-5x^2\right)^2}=\frac{1}{4}\left[\ln(6x-3)+3lnx-2ln\left(1-5x^2\right)\right],$

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{4}\left[\frac{6}{6x-3}+\frac{3}{x}-\frac{2}{1-5x^2}\cdot(-10x)\right]=\frac{1}{4}\left[\frac{2}{2x-1}+\frac{3}{x}+\frac{20x}{1-5x^2}\right],$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{4}\left[\frac{-5x^2+8x-3}{x(2x-1)\left(1-5x^2\right)}\right],$$

$$y'=\frac{1}{4}\left[\frac{-5x^2+8x-3}{x(2x-1)\left(1-5x^2\right)}\right]y=\frac{1}{4}\left[\frac{-5x^2+8x-3}{x(2x-1)\left(1-5x^2\right)}\right]\sqrt[4]{\frac{(6x-3)x^3}{\left(1-5x^2\right)^2}}.$$

в) Производная от функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x=f(t), \\ y=\varphi(t). \end{cases}$$

Производная вычисляется по формуле $y_x{}'=\frac{y_t{}'}{x_t{}'}$

Задача 3.3. Найти производную $y_x{}'$ для функции, заданной параметрически $\begin{cases} x=t^3+3t+1, \\ y=3t^5+5t^3+1, \end{cases}$

Решение. Найдем $y_t{}'=15t^4+15t^2, x_t{}'=3t^2+3$. Следовательно,

$$y_t{}'=\frac{15t^4+15t^2}{3t^2+3}=5t^2.$$

Задача 3.4. Показать, что функция $y\left(x^2+Cx\right)=1$ обращает уравнение $y'+\frac{y}{x}=-xy^2$ в тождество.

Решение. Выразим y в явном виде $y=\frac{1}{x^2+Cx}$. Найдем

$$y'=\left(\frac{1}{x^2+Cx}\right)'=\left[\left(x^2+Cx\right)^{-1}\right]'=-\left(x^2+Cx\right)^{-2}(2x+C)=-\frac{2x+C}{\left(x^2+Cx\right)^2}.$$

Подставляя y и y' в левую часть уравнения, получаем $-xy^2$.

Производная от функции, заданной параметрически

Задача 3.7. Для функции, заданной параметрически, найти y''_{xx}:

$$\begin{cases} x=t^2+2t, \\ y=ln(t+1). \end{cases}$$

Решение. Находим производные x и y по параметру t:

$$x'_t=2t+2, \quad y'_t=\frac{1}{t+1},$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{1}{t+1}}{2(t+1)} = \frac{1}{2(t+1)^2} = \frac{1}{2}(t+1)^{-2}.$$

Далее находим производную от y'_x по t, а затем искомую вторую производную от y по x как отношение производных от y'_x по t и от x по t:

$$\left(y'_x\right)'_t = \frac{1}{2}(-2)(t+1)^{-3} = -\frac{1}{\left(t+1\right)^3}$$

$$y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} = \frac{-\frac{1}{(t+1)^3}}{2(t+1)} = -\frac{1}{2(t+1)^4}.$$

Задача 3.8. Найти общее выражение для производной порядка n от функции $y = xe^x$.

Решение. Вычисления без формулы Лейбница. Найдём несколько производных:

$$y' = e^x + xe^x;$$
$$y'' = 2e^x + xe^x;$$
$$y''' = 3e^x + xe^x.$$

Выдвинем гипотезу, что $y^{(n)} = n \cdot e^x + xe^x$. Докажем её методом математической индукции. При $n=1$ доказываемое равенство верно. Пусть оно верно и при $n = k$, т.е. $y^{(k)} = k \cdot e^x + xe^x$. Проверим истинность равенства при $n = k+1$: $y^{(k+1)} = \left(k \cdot e^x + xe^x\right) = (k+1) \cdot e^x + xe^x$.

При $n = k+1$ равенство выполнено, поэтому согласно методу индукции, равенство $y^{(n)} = n \cdot e^x + xe^x$ верно при всех $n \in N$

Решение с применением формулы Лейбница. Согласно формуле Лейбница имеем:

$$\left(y_1 \cdot y_2\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(n-k)} y_2^{(k)}.$$

В нашем случае $y_1 = x, y_2 = e^x$. Так как при $n \geq 2$ имеем $y_1^{(n)} = 0$ и, кроме того, $y_2^{(n)} = e^x$ïðè$n \in N$, то в формуле Лейбница останутся лишь те слагаемые, которые содержат y_1'èy_1, т.е. два слагаемых при $k = n-1$ и $k = n$:

$$\left(xe^x\right)^{(n)} = C_n^{n-1} e^x + C_n^n xe^x = ne^x + xe^x.$$

Ответ $ne^x + xe^x$.

Задача 3.9. Найти общее выражение для производной порядка n функции $y = \frac{1}{ax+b}$.

Решение. Случай $a = 0$ рассматривается элементарно. Пусть $a \neq 0$. Имеем

$$y' = -a\cdot(ax+b)^{-2};$$
$$y'' = -1\cdot(-2)\cdot a^2\cdot(ax+b)^{-3};$$
$$y''' = -1\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot a^3\cdot(ax+b)^{-4}.$$

Исходя из полученных результатов, можно предположить, что выражение для $y^{(n)}$ будет таким: $y^{(n)} = -1\cdot(-2)\cdot\ldots\cdot(-n)\cdot a^n\cdot(ax+b)^{-(n+1)} = (-1)^n\cdot n!\cdot a^n\cdot(ax+b)^{-n-1}$. Докажем это методом математической индукции. При $n=1$ равенство верно. Пусть оно верно и при $n=k$, т.е. $y^{(k)} = (-1)^k\cdot k!\cdot a^k\cdot(ax+b)^{-k-1}$. Проверим выполнение равенства при $n=k+1$: $y^{(k+1)} = \left((-1)^k\cdot k!\cdot a^k\cdot(ax+b)^{-k-1}\right)' = (-1)^{k+1}\cdot(k+1)!\cdot a^{k+1}\cdot(ax+b)^{-k-2}$. Равенство истинно при $n=k+1$, поэтому согласно методу математической индукции, формула $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$ верна при всех $n\in N$.

Ответ. $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$.

Правило Лопиталя

Задача 3.10. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$.

Решение. Дифференцируя числитель и знаменатель, находим значение предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\left(a^x-1\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a}{1} = \ln a\lim_{x\to 0}a^x = \ln a\cdot 1 = \ln a.$$

Задача 3.11. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{7+x}-3}{x-2}$.

Решение. Поскольку прямая подстановка приводит к неопределенности типа $\dfrac{0}{0}$, применяем правило Лопиталя.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{7+x}-3}{x-2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{7+x}-3\right)'}{(x-2)'} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{2\sqrt{7+x}}}{1} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{7+x}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Задача 3.12. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{4}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)$.

Решение. Здесь мы имеем дело с неопределенностью типа $\infty-\infty$. После простых преобразований, получаем

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{4}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{4-(x+2)}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{2-x}{x^2-4} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(2-x)'}{(x^2-4)'} = \lim_{x\to 2}\left(\frac{-1}{2x}\right) = -\frac{1}{4}.$$

Задача 3.13. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2^x}$.

Решение. Используя правило Лопиталя, можно записать

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2)'}{(2^x)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2^x\ln 2} = \frac{2}{\ln 2}\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$== \frac{2}{\ln 2}\lim_{x\to\infty}\frac{(x)'}{(2^x)'} = \frac{2}{\ln 2}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2^x\ln 2} = \frac{2}{(\ln 2)^2}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2^x} = \frac{2}{(\ln 2)^2}\cdot 0 = 0.$$

Задача 3.14. Найти предел $\lim\limits_{t\to\infty}\sqrt[t]{t^3}$.

Решение. Здесь мы встречаемся с неопределенностью типа ∞^0. Обозначим $y = \sqrt[t]{t^3}$. После логарифмирования получаем

$$\ln y = \ln\sqrt[t]{t^3} = \ln\left(t^3\right)^{1/t} = \ln t^{\frac{3}{t}} = \frac{3}{t}\ln t = \frac{3\ln t}{t} \Rightarrow \sqrt[t]{t^3} = e^{\ln\sqrt[t]{t^3}} = e^{\frac{3\ln t}{t}}.$$

Далее, по правилу Лопиталя, находим

$$\lim_{t\to\infty}\frac{3\ln t}{t} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 3\lim_{t\to\infty}\frac{(\ln t)'}{t'} = 3\lim_{t\to\infty}\frac{1/t}{1} = 3\cdot 0 = 0.$$

Соответственно,

$$\lim_{t\to\infty} y = e^0 = 1.$$

Задача 3.15. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

Решение. Предел содержит неопределенность типа 1^∞. Пусть $y = x^{\frac{1}{1-x}}$. Тогда

$$\ln y = \ln x^{\frac{1}{1-x}} = \frac{\ln x}{1-x} \Rightarrow x^{\frac{1}{1-x}} = e^{\ln x^{\frac{1}{1-x}}} = e^{\frac{\ln x}{1-x}}.$$

По правилу Лопиталя получаем

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x} = \lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{(1-x)'} = \lim_{x\to 1}\frac{1/x}{-1} = -\lim_{x\to 1}\frac{1}{x} = -1.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 1} y = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Задача 3.16. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0+} x^x = e^{\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x}$. Далее,

$$\lim_{x\to0+}(x\ln x)=\lim_{x\to0+}\frac{\ln x}{1/x}=\left[-\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{(\ln x)'}{(1/x)'}=\lim_{x\to0+}\frac{1/x}{-1/x^2}=-\lim_{x\to0+}x=0.$$

Тогда

$$\lim_{x\to0+}x^x=e^0=1.$$

Задача 3.17. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to0+}(\arcsin x)^{2x}$.

Решение. Мы имеем здесь неопределенность типа 0^0. Запишем $\lim\limits_{x\to0+}(\arcsin x)^{2x}=e^{\lim\limits_{x\to0+}2x\ln\arcsin x}$.

Используем правило Лопиталя дважды:

$$\lim_{x\to0+}\left[2x\ln(\arcsin x)\right]=2\lim_{x\to0+}\frac{\ln(\arcsin x)}{1/x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=2\lim_{x\to0+}\frac{(\ln(\arcsin x))'}{(1/x)'}=2\lim_{x\to0+}\frac{\dfrac{1}{\arcsin x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-1/x^2}=$$

$$=-2\lim_{x\to0+}\frac{x^2}{\arcsin x}\cdot\lim_{x\to0+}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=-2\lim_{x\to0+}\frac{x^2}{\arcsin x}\cdot1=\left[\frac{0}{0}\right]=-2\lim_{x\to0+}\frac{(x^2)'}{(\arcsin x)'}=$$

$$=-2\lim_{x\to0+}\frac{2x}{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=-4\lim_{x\to0+}\left(x\sqrt{1-x^2}\right)=-4\cdot0=0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to0+}(\arcsin x)^{2x}=e^0=1.$$

Задача 3.18. Найти предел $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^x$.

Решение. Подстановка приводит к неопределенности типа 1^∞. Имеем

$$\lim_{x\to\pi/2}(\sin x)^x=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}x\ln\sin x}.$$

Применяя правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{x\to\pi/2}(x\ln\sin x)=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln\sin x}{\cot x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$= \lim_{x\to\pi/2} \frac{(\ln\sin x)'}{(\cot x)'} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -\lim_{x\to\pi/2} \frac{\sin^2 x\cdot\cos x}{\sin x} =$$

$$= -\lim_{x\to\pi/2} (\sin x\cos x) = -\lim_{x\to\pi/2} \sin x \cdot \lim_{x\to\pi/2} \cos x = -1\cdot 0 = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to\pi/2} (\sin x)^x = e^0 = 1.$$

Задача 3.19. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x}$.

Решение. Предел имеет неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$. Применяем правило Лопиталя n раз.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^n)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(nx^{n-1})'}{(e^x)'} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{n(n-1)(n-1)\ldots 1}{e^x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{e^x} = n! \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = n!\cdot 0 = 0.$$

Задача 3.20. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\pi/2} \frac{x}{3x}$.

Решение. В соответствии с правилом Лопиталя дифференцируем числитель и знаменатель данной дроби несколько раз, пока не исчезнет неопределенность.

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{x}{3x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\pi/2} \frac{(x)'}{(3x)'} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\sec^2 x}{3\sec^2 3x} = \frac{1}{3} \lim_{x\to\pi/2} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 3x}} =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \frac{1}{3} \lim_{x\to\pi/2} \frac{(\cos^2 3x)'}{(\cos^2 x)'} =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x\to\pi/2} \frac{2\cos 3x\cdot(-3\sin 3x)}{2\cos x\cdot(-\sin x)} =$$

$$= \lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos 3x \sin 3x}{\cos x \sin x} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos 3x}{\cos x} \cdot \lim_{x\to\pi/2} \frac{\sin 3x}{\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos 3x}{\cos x} \cdot \frac{\sin \frac{3\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} =$$

$$= \lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos 3x}{\cos x} \cdot \frac{(-1)}{1} = -\lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos 3x}{\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= -\lim_{x\to\pi/2} \frac{(\cos 3x)'}{(\cos x)'} = -\lim_{x\to\pi/2} \frac{(-3\sin 3x)}{(-\sin x)} =$$

$$= -3\lim_{x\to\pi/2} \frac{\sin 3x}{\sin x} = -3 \cdot \frac{(-1)}{1} = 3.$$

$\lim\limits_{x\to\pi/2} y = e^0 = 1.$

В качестве упражнения найдите следующие пределы.

1. $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{\sqrt[3]{32+x} - \sqrt[3]{22-x}}{\sqrt[3]{(5+x)^2} + \sqrt[5]{5+x}}$.

2. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt[3]{28+x} - \sqrt[3]{26-x}}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[5]{x+1}}$.

3. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x+12} - 2\sqrt{x}}{(x-1)^2 - 9}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{27+6x} - \sqrt[3]{27-6x}}{\sqrt[3]{36x^2} + \sqrt[5]{6x}}$.

5. $\lim\limits_{x\to 2/7} \dfrac{\sqrt[3]{28x} - 2}{\sqrt{7x+2} - \sqrt{14x}}$..

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{192x^2 - 40x}{\sin(24x)}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(5x)}{\cos(35x)-\cos(15x)}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{8x}-1}{\ln(1+16x)}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9}{4}\dfrac{\ln(1-24x)}{arctg(36x)}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-36x}-1}{\sin\left(\pi\left(-\dfrac{9}{2}x+1\right)\right)}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{16x}-5^{24x}}{16x-arctg(24x)}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{-30x}-2^{-6x}}{-6x+\sin(54x)}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{-45x}-9^{18x}}{-\sin(9x)+(729x^3)}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{-30x}-9^{12x}}{-\sin(6x)+(216x^3)}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-10x}-e^{20x}}{-10x+\sin(100x^2)}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{-5x+2}{3+5x}\right)^{-5x}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{1}{9}\dfrac{e^{-27x}-1}{x}\right)^{\cos\left(-\frac{1}{4}\pi+9x\right)^2}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{25x^2+4}{-5x+2}\right)^{25x^2+3}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{121x^2+4}{-11x+2}\right)^{121x^2+3}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\left(6-\dfrac{5}{\cos(7x)}\right)^{tg(7x)^2}$.

Контрольные вопросы

1. Что такое логарифмическая производная? Покажите на примере, как она применяется?

2. Как определяются производная и дифференциалы высших порядков? Приведите формулы для вычисления производных любого порядка для функций $x^\alpha, a^x, \sin x, \cos x$.

3. Как вычисляются высшие производные произведения функций с помощью формулы Лейбница?

4. Как записываются локальная и глобальная формулы Тейлора?

5. Что такое остаточный член в форме Пеано? Запишите локальные формулы Маклорена"– Тейлора для функций $e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), (1+x)^\alpha$.

6. Как формулируются теоремы Ролля, Лагранжа и Коши? В чем состоит их геометрический смысл?

7. Как доказывается правило Лопиталя с помощью теоремы Коши? Приведите примеры раскрытия неопределенностей с помощью правила Лопиталя.

8. Как применяется формула Тейлора для приближенного вычисления значений функции и при вычислении пределов? Приведите примеры.

Для усвоения изложенной теории рекомендуем также выполнить задачи по теме данной лекции из типового расчета «Производные».