Лекция 6. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона"– Лейбница. Интегрирование дробно-рациональных функций и тригонометрических выражений

Вычисление определенного интеграла можно свести к вычислению неопределенного. Соответствующая формула носит название формулы Ньютона"– Лейбница. Для ее вывода необходимо изучить сначала свойства интеграла с переменным верхним пределом, к описанию которого мы переходим.

6.1. Интеграл с переменным верхним пределом

Заметим, что в качестве переменной интегрирования можно выбрать любую букву:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(\xi)\,d\xi = \int_a^b f(A)\,dA.$$

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Тогда для любого $x \in [a,b]$ можно вычислить число $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$ Значит, для каждого $x \in [a,b]$ определена функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$ Эту функцию называют *интегралом с переменным верхним пределом*.

Теорема 6.1. *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то интеграл $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ непрерывен на этом отрезке. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то $F(x)$ дифференцируема на указанном отрезке, причем*

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(t)\big|_{t=x} \left(\forall x \in [a,b]\right). (6.1)$$

Доказательство первой части этого утверждения опускаем. Перейдем к обоснованию второй части. Пусть x — произвольная точка интервала (a,b). Вычислим

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} \equiv \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt + \int_x^a f(t)\,dt}{\Delta x} = \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x}.$$

Так как $f(t)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то применима теорема о среднем: существует точка $c \in [x, x+\Delta x], \Delta x > 0 \left(c \in [x+\Delta x, x], \Delta x < 0\right)$ такая, что

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(c)(x+\Delta x - x) = f(c)\Delta x.$$

Тогда $\dfrac{\Delta F(x)}{\Delta x} = f(c)$. Устремляя здесь $\Delta x \to 0$ и учитывая, что при этом $c \to x, f(c) \to f(x)$, будем иметь $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta F(x)}{\Delta x} = f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$. Равенство (6.1) показано в любой внутренней точке отрезка $[a,b]$. Можно показать, что оно верно и на концах этого отрезка. Теорема доказана.

Следствие 6.1. *Любая непрерывная на отрезке* $[a,b]$ *функция* $f(x)$ *имеет первообразную.*

Действительно, в качестве одной из первообразных можно указать интеграл $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ с переменным верхним пределом (при этом $F'(x) = f(x)\big(\forall x \in [a,b]\big)$, т. е. $F(x)$ — первообразная для $f(x)$).

6.2. Формула Ньютона"–Лейбница

Докажем одну из основных формул интегрального исчисления.

Теорема 6.2. *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$ *и* $\Phi(x)$ *— её первообразная на отрезке* $[a,b]$. *Тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(x)\big|_{x=a}^{x=b} = \Phi(b) - \Phi(a). \quad (6.2)$$

Доказательство. Так как $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ — первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, то существует постоянная C такая, что $\int_a^x f(t)\,dt = \Phi(x) + C$. Положим в этом равенстве $x = a$; будем иметь $0 = \Phi(a) + C \Leftrightarrow C = -\Phi(a)$. Поэтому

$$\int_a^x f(t)\,dt = \Phi(x) - \Phi(a).$$

Полагая здесь $x = b$, получаем формулу (6.2). Теорема доказана.

Например,

$$\int_2^3 (x^3+2x)\,dx = \left(\int (x^3+2x)\,dx\right)\Big|_{x=2}^{x=3} = \left(\frac{x^4}{4} + x^2 + C\right)\Big|_2^3 = \left(\frac{3^4}{4} + 3^2 + C\right) - \left(\frac{2^4}{4} + 2^2 + C\right) = \frac{85}{4}.$$

Этот пример показывает, что постоянную C при вычислении неопределенного интеграла можно не писать.

[***Лекция 6*]*6.3. Замена переменных и интегрирование по частям в определенном интеграле***

6.3. Замена переменных и интегрирование по частям в определенном интеграле

С помощью формулы Ньютона – Лейбница нетрудно доказать два следующих утверждения.

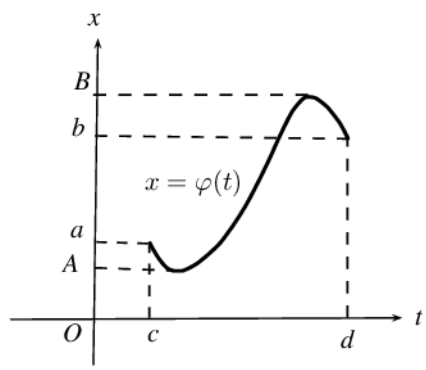

Рис. 6.1

Теорема 6.3 (рис. 6.1). *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[A,B]\supset[a,b]$, *а функция* $x=\varphi(t)$ *непрерывно дифференцируема на отрезке* $[c,d]$ *таком, что* $\varphi(c)=a,\varphi(d)=b$, *причем* $\varphi[c,d]\subset[A,B]$. *Тогда имеет место формула замены переменных в определенном интеграле:*

$$\int_a^b f(x)dx=\left[x=\varphi(t),dx=\varphi'(t)dt,\varphi(c)=a,\varphi(d)=b\right]=$$

$$=\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[A,B]$ (она существует, так как $f(x)$ непрерывна на отрезке $[A,B]$). Покажем, что функция $\Phi(t)\equiv F(\varphi(t))$ является первообразной функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на любом множестве $B:\varphi(B)\subset[A,B]$. Действительно, по теореме о производной сложной функции имеем

$$\Phi'(t)\equiv\frac{d}{dt}F(\varphi(t))=\frac{d}{dx}F(x)|_{x=\varphi(t)}\varphi'(t)=$$
$$=f(x)|_{x=\varphi(t)}\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t)\ \forall t\in\varphi(B),$$

откуда следует наше утверждение. Так как $B=\varphi[c,d]\subset[A,B]$, то по теореме Ньютона-Лейбница имеем

$$\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \Phi(t)\Big|_{t=c}^{t=d} = F(\varphi(t))\Big|_{t=c}^{t=d} = F(\varphi(d)) - F(\varphi(c)) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Теорема доказана.

Теорема 6.4. *Пусть функции* $u = u(x), v = v(x)$ *непрерывно-дифференцируемы на отрезке* $[a,b]$. *Тогда имеет место формула интегрирования по частям в определенном интеграле:*

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b v\,du.$$

Доказательство вытекает из тождества

$$(u(x)\cdot v(x))' \equiv u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) \Leftrightarrow u(x)\cdot v'(x) \equiv$$

$$\equiv (u(x)\cdot v(x))' - u'(x)\cdot v(x) (\forall x \in [a,b]),$$

интегрируя которое на отрезке $[a,b]$:

$$\int_a^b u\cdot v'dx = \int_a^b (u\cdot v)'\,dx - \int_a^b v\cdot u'dx \Leftrightarrow \int_a^b u\cdot dv = (u\cdot v)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b v\,du.$$

получаем наше утверждение.

6.4. Интегрирование дробно-рациональных функций

Дробно-рациональной функцией (*или алгебраической дробью*) называется функция, представимая в виде отношения двух многочленов:

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} \equiv \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0}.$$

При этом дробь $R(x)$ называется *правильной,* если степень m ее многочлена-числителя $P_m(x)$ меньше степени n её многочлена-знаменателя $Q_n(x)$; в противном случае (т. е. в случае $m \geq n$) дробь $R(x)$ называется *неправильной.* Любую неправильную дробь можно представить в виде суммы многочлена (целой части) и правильной дроби. Для этого надо разделить числитель на знаменатель. Например,

$$\frac{3x^4 - 5x^2 + 2x - 8}{x^2 + 3x - 1} = 3x^2 - 9x + 25 + \frac{17 - 82x}{x^2 + 3x - 1}.$$

Определение 6.1. *Простейшими дробями типа* $I - IV$ называются следующие дроби:

$$I.\ \frac{A}{x-a};\ II.\ \frac{A}{(x-a)^k};\ III.\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\left(D=p^2-4q<0\right);$$

$$IV.\ \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^m}\left(D=p^2-4q<0\right),$$

где A, M, N, a, p, q — действительные постоянные, $k \geq 2$, $m \geq 2$ ---íàòóðàëüíûå÷èñëà.

Теорема 6.5. *Любую правильную дробь* $R(x)$ *можно разложить в сумму простейших дробей типа* $I-IV$. *Это разложение единственно (с точностью до порядка слагаемых).*

Алгоритм разложения на простейшие дроби. *Пусть требуется разложить на простейшие дроби правильную дробь* $R(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$. *Выполним следующие действия:*

1) Разложим знаменатель на множители:

$$Q_n(x)=b_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{r_1}\left(x^2+p_2x+q_2\right)^{r_2}.$$

2) Каждому «линейному» множителю $(x-x_0)^k$ *поставим в соответствие сумму* k *простейших дробей типа* $I-II$:

$$\frac{A_k}{(x-x_0)^k}+\frac{A_{k-1}}{(x-x_0)^{k-1}}+\ldots+\frac{A_1}{x-x_0},$$

а каждому «квадратичному» множителю $\left(x^2+px+q\right)^m$ *поставим в соответствие* m *дробей типа* $III-IV$:

$$\frac{M_mx+N_m}{\left(x^2+px+q\right)^m}+\frac{M_{m-1}x+N_{m-1}}{\left(x^2+px+q\right)^{m-1}}+\ldots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}.$$

Сделав это для каждого множителя знаменателя $Q_n(x)$, *запишем тождество*

$$\begin{aligned}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\equiv&\left[\frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}+\frac{A_{k_1-1}}{(x-x_1)^{k_1-1}}+\ldots+\frac{A_1}{x-x_1}\right]+\\&+\left[\frac{\hat{A}_{k_2}}{(x-x_1)^{k_2}}+\frac{\hat{A}_{k_2-1}}{(x-x_1)^{k_2-1}}+\ldots+\frac{\hat{A}_1}{x-x_1}\right]+\\&+\left[\frac{M_{r_1}x+N_{r_1}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{r_1}}+\frac{M_{r_1-1}x+N_{r_1-1}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{r_1-1}}+\ldots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1}\right]+\\&+\left[\frac{\hat{M}_{r_2}x+\hat{N}_{r_2}}{\left(x^2+p_2x+q_2\right)^{r_2}}+\frac{\hat{M}_{r_2-1}x+\hat{N}_{r_2-1}}{\left(x^2+p_2x+q_2\right)^{r_2-1}}+\ldots+\frac{\hat{M}_1x+\hat{N}_1}{x^2+p_1x+q_1}\right].\end{aligned}\tag{6.3}$$

3) Умножив обе части этого тождества на знаменатель $Q_n(x)$, *получим* *тождество двух многочленов. Приравнивая в нем коэффициенты при одинаковых степенях* x^s, *получим линейную алгебраическую систему уравнений относительно неопределенных коэффициентов* $A_j, \hat{A}_j, M_j, \hat{M}_j, N_j, \hat{N}_j$, *решая которую (например, методом Гаусса), найдем эти коэффициенты (можно применить также метод частных значений, выбирая в тождестве двух многочленов* x, *равным значениям корней многочлена-знаменателя). Подставляя найденные коэффициенты в тождество (6.3), получим разложение дроби* $R(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ *на простейшие дроби.*

Например, разложим дробь $R(x) = \dfrac{5x^3+3x^2+23x+9}{\left(x^2-2\,x+1\right)\left(x^2+2x+5\right)}$ на простейшие. Так как $\left(x^2-2\,x+1\right)\left(x^2+2x+5\right)(x-1)^2\left(x^2+2x+5\right)$, то $R(x)$ представляется в виде

$$\frac{5x^3+3x^2+23x+9}{\left(x^2-2\,x+1\right)\left(x^2+2x+5\right)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+2x+5}, \quad (6.4)$$

где коэффициенты A, B, M, N пока не найдены. Приводя правую часть к общему знаменателю, а затем отбрасывая в обеих частях одинаковые знаменатели, получим тождество:

$$\begin{gathered} 5x^3+3x^2+23x+9 \equiv A\left(x^2+2x+5\right)+ \\ +B(x-1)\left(x^2+2x+5\right)+(Mx+N)(x-1)^2. \end{gathered} \quad (6.5)$$

Можно было бы приравнять здесь коэффициенты при одинаковых степенях x (начиная с x^3), а затем решить полученную систему уравнений относительно A, B, M, N. Но мы поступим проще. Применим так называемый *метод частных значений*.

Так как равенство (6.5) — тождество, то оно верно при любых значениях x. Удобно выбрать значение $x=1$. При этом из выражения (6.5) получаем равенство $40=8A$, откуда выводим, что $A=5$. Далее подставляя $A=5$ в разложение (6.4) и перенося все первые слагаемые влево, будем иметь:

$$5x^3-2x^2+13x-16 \equiv B(x-1)\left(x^2+2x+5\right)+(Mx+N)(x-1)^2.$$

Разделив обе части этого тождества на $x-1$, получим

$$5x^2+3x+16 = B\left(x^2+2x+5\right)+(Mx+N)(x-1).$$

Полагая здесь снова $x=1$, будем иметь $24=8B \Leftrightarrow B3$, и последнее равенство перепишется в виде $2x^2-3x+1(Mx+N)(x-1) \Rightarrow 2x-1 = Mx+N$. Отсюда сразу же находим $M=2, N=-1$. Следовательно, все коэффициенты разложения формулы (6.4) найдены и мы получаем ответ:

$$\frac{5x^3+3x^2+23x+9}{\left(x^2-2\,x+1\right)\left(x^2+2x+5\right)} = \frac{5}{(x-1)^2} + \frac{3}{x-1} + \frac{2x-1}{x^2+2x+5}.$$

Из теоремы 6.5 вытекает, что интегрирование правильных алгебраических дробей сводится к их разложению на простейшие дроби и последующему интегрированию последних. Займемся задачей интегрирования простейших дробей.

Дроби типа $I-II$ интегрируются очевидным образом:

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\cdot \ln|x-a|+C; \int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) = \frac{A(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C.$$

Дробь типа III интегрируется следующим образом:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx =$$

$$= \left[x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right); x+\frac{p}{2} = t, dx = dt, q-\frac{p^2}{4} = a^2\right] =$$

$$= \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}dt = M\int \frac{tdt}{t^2+a^2} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d\left(t^2+a^2\right)}{t^2+a^2} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} = \frac{M}{2}\ln\left(t^2+a^2\right)+$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C = \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{a}+C.$$

Дробь типа IV интегрируется сложнее. Сначала производятся все операции, применяемые при интегрировании дроби типа III, а затем используется рекуррентная формула

$$\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{m+1}} = \frac{1}{2ma^2}\left(\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^m} + (2m-1)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m}\right).$$

Например,

$$\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^2} = \frac{1}{2\cdot 1\cdot a^2}\left(\frac{t}{t^2+a^2} + (2-1)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)}\right) =$$

$$= \frac{t}{2a^2\left(t^2+a^2\right)} + \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{a}\right)}{2a^3}+C.$$

В заключение предлагаем вычислить самостоятельно интеграл

$$\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)\cdot\left(x^2+1\right)^2}dx = \int\left(\frac{-4-3x}{\left(x^2+1\right)^2} + \frac{-2-x}{x^2+1} + \frac{1}{x-2}\right)dx$$

и получить ответ: $\frac{1}{4}\cdot\frac{-8x+6}{x^2+1}-4arctg(x)-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\ln|x-2|+C.$

6.5. Интегрирование тригонометрических выражений

Интегралы типа $I=\int R(\sin x,\cos x)dx,$ где $R(u,v)$ — дробно-рациональная функция переменных u и v, сводятся к интегрированию рациональной функции одной переменной t с помощью *универсальной подстановки* $t=\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}.$ Действительно, тогда

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},dx=\frac{2dt}{1+t^2},$$

поэтому $I=\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}\equiv\int R_1(t)dt,$ где $R_1(t)$ — дробно-рациональная функция одной переменной. К последнему интегралу можно уже применить алгоритм разложения на простейшие дроби и свести вычисления к интегрированию простейших дробей типа $I-IV$. Однако не всегда удобно пользоваться универсальной подстановкой, так как она часто приводит к громоздким выкладкам.

Иногда удобно *пользоваться частными типами подстановок* (слева написано свойство подынтегральной функции R, справа — соответствующая замена переменной):

$$1.R(-u,v)\equiv-R(u,v)\Rightarrow\boxed{\cos x=t}.$$

$$2.R(u,-v)\equiv-R(u,v)\Rightarrow\boxed{\sin x=t}.$$

$$3.R(-u,-v)\equiv R(u,v)\Rightarrow\boxed{\mathrm{tg}\,x=t}.$$

$$4.\int R\left(\sin^2 x\right)dx,\int R\left(\cos^2 x\right)dx\Rightarrow\boxed{\mathrm{tg}\,x=t}$$

(здесь часто бывает удобным воспользоваться формулами $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}.$)

И, наконец, интегралы типа $\int\left[\begin{array}{l}\cos\alpha x\cdot\cos\beta x dx,\\ \sin\alpha x\cdot\cos\beta x dx,\\ \sin\alpha x\cdot\sin\beta x dx\end{array}\right.$ преобразуются в интегралы от синусов и косинусов с помощью формул тригонометрии:

$$\cos\alpha x\cdot\cos\beta x=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)x+\cos(\alpha+\beta)x\right),$$

$$\sin\alpha x\cdot\sin\beta x=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x\right),$$

$$\sin\alpha x\cdot\cos\beta x=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)x+\sin(\alpha+\beta)x\right).$$

6.6. Задачи с решениями

Задача 6.1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^2\left(x^3-x^2\right)dx.$

Решение. Применяя формулу Ньютона-Лейбница, получаем

$$\int\limits_0^2\left(x^3-x^2\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\left(\frac{16}{4}-\frac{8}{3}\right)-0=\frac{4}{3}.$$

Задача 6.2. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1\left(\sqrt[3]{t}-\sqrt{t}\right)dt.$

Решение.

$$\int\limits_0^1\left(\sqrt[3]{t}-\sqrt{t}\right)dt=\int\limits_0^1\left(t^{\frac{1}{3}}-t^{\frac{1}{2}}\right)dt=\left(\frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}-\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\left(\frac{3t^{\frac{4}{3}}}{4}-\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3}\right)\Bigg|_0^1=\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)-0=\frac{1}{12}.$$

Задача 6.3. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1\frac{x}{\left(3x^2-1\right)^4}dx.$

Решение. Сделаем замену:

$$t=3x^2-1,\ \Rightarrow dt=6xdx,\ \Rightarrow xdx=\frac{dt}{6}.$$

Пересчитаем пределы интегрирования. Если $x=0,$ то $t=-1.$ Если же $x=1,$ то $t=2.$ Тогда интеграл через новую переменную t легко вычисляется:

$$\int\limits_0^1\frac{x}{\left(3x^2-1\right)^4}dx=\int\limits_{-1}^2\frac{\frac{dt}{6}}{t^4}=\frac{1}{6}\int t^{-4}dt=\frac{1}{6}\left(\frac{t^{-3}}{-3}\right)\Bigg|_{-1}^2=-\frac{1}{18}\left(\frac{1}{8}-1\right)=\frac{7}{144}.$$

Задача 6.4. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\ln 2} xe^{-x}dx.$

Решение. Запишем интеграл в виде

$$I = \int\limits_0^{\ln 2} xe^{-x}dx = -\int\limits_0^{\ln 2} xd\left(e^{-x}\right).$$

Используем интегрирование по частям: $\int udv = uv - \int vdu.$ В нашем случае пусть будет

$$u = x,\ dv = d\left(e^{-x}\right),\ \Rightarrow du = 1,\ v = e^{-x}.$$

Следовательно, интеграл равен

$$I = -\int\limits_0^{\ln 2} xd\left(e^{-x}\right) = -\left[\left(xe^{-x}\right)\Big|_0^{\ln 2} - \int\limits_0^{\ln 2} e^{-x}dx\right] =$$

$$= -\left(xe^{-x}\right)\Big|_0^{\ln 2} + \int\limits_0^{\ln 2} e^{-x}dx = -\left(xe^{-x}\right)\Big|_0^{\ln 2} - \left(e^{-x}\right)\Big|_0^{\ln 2} =$$

$$= -\left[e^{-x}\left(x+1\right)\right]\Big|_0^{\ln 2} = -e^{-\ln 2}\left(\ln 2 + 1\right) + e^0 \cdot 1 =$$

$$= -\frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln e}{2} + \ln e = \frac{\ln e}{2} - \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{2}\left(\ln e - \ln 2\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{e}{2}.$$

Задача 6.5. Вычислить интеграл $\int \frac{2x+3}{x^2-9}dx.$

Решение. Разложим подынтегральное выражение на простейшие дроби:

$$\frac{2x+3}{x^2-9} = \frac{2x+3}{\left(x-3\right)\left(x+3\right)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}.$$

Сгруппируем слагаемые и приравняем коэффициенты при членах с одинаковыми степенями:

$$A\left(x+3\right) + B\left(x-3\right) = 2x+3 \Rightarrow Ax + 3A + Bx - 3B = 2x+3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(A+B\right)x + 3A - 3B = 2x+3.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 3A-3B=3 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{3}{2} \\ B = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Тогда

$$\frac{2x+3}{x^2-9} = \frac{\frac{3}{2}}{x-3} + \frac{\frac{1}{2}}{x+3}.$$

Теперь легко вычислить исходный интеграл

$$\int \frac{2x+3}{x^2-9}dx = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-3} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+3} = \frac{3}{2}\ln|x-3| + \frac{1}{2}\ln|x+3| + C =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|(x-3)^2(x+3)\right| + C.$$

Задача 6.6. Вычислить интеграл $\int \frac{x^2-2}{x+1}dx.$

Решение. Сначала выделим правильную рациональную дробь, разделив числитель на знаменатель.

$$\frac{x^2-2}{x+1} = x-1-\frac{1}{x+1}.$$

Получаем

$$\int \frac{x^2-2}{x+1}dx = \int \left(x-1-\frac{1}{x+1}\right)dx =$$

$$= \int x dx - \int dx - \int \frac{dx}{x+1} = \frac{x^2}{2} - x - \ln|x+1| + C.$$

Задача 6.7. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}.$

Решение.

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+8} = \int \frac{dx}{x^2+4x+4+4} =$$

$$= \int \frac{dx}{(x+2)^2+4} = \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+2^2} = \frac{1}{2}\frac{x+2}{2} + C.$$

Задача 6.8. Вычислить интеграл $\int \frac{x^2dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$

Решение. Разложим подынтегральное выражение на сумму простейших дробей, используя метод неопределенных коэффициентов:

$$\frac{x^2dx}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Определим коэффициенты:

$$A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2) = x^2,$$

$$Ax^2 - 2Ax - 3Ax + 6A + Bx^2 - Bx - 3Bx + 3B +$$
$$+Cx^2 - Cx - 2Cx + 2C = x^2,$$

$$(A+B+C)x^2 - (5A+4B+3C)x + 6A + 3B + 2C = x^2.$$

Получаем

$$\frac{x^2dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{\frac{1}{2}}{x-1}-\frac{4}{x-2}+\frac{\frac{9}{2}}{x-3}.$$

Интеграл, соответственно, равен

$$\int\frac{x^2dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-4\int\frac{dx}{x-2}+\frac{9}{2}\int\frac{dx}{x-3}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x-1|-4\ln|x-2|+\frac{9}{2}\ln|x-3|+C.$$

Задача 6.9.

Найти интеграл $\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$.

Решение. Разложим подынтегральное выражение на сумму двух дробей.

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Найдем неизвестные коэффициенты.

$$A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1)=1\Rightarrow Ax^2+A+Bx^2+Cx+Bx+C=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(A+B)x^2+(B+C)x+A+C=1.$$

Отсюда получаем

$$\begin{cases}A+B=0,\\B+C=0,\\A+C=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{2},\\B=-\frac{1}{2},\\C=\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Подынтегральное выражение представляется в виде

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1}=\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}.$$

Исходный интеграл равен

$$\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{xdx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}+\frac{1}{2}\arctan x=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

Задача 6.10. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

Решение. Разложим знаменатель в подынтегральном выражении на множители:

$$x^3+1=(x+1)\left(x^2-x+1\right).$$

Далее представим подынтегральное выражение в виде суммы простейших дробей

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

Определим коэффициенты:

$$A\left(x^2-x+1\right)+(Bx+C)(x+1)=1 \Rightarrow$$

$$Ax^2-Ax+A+Bx^2+Cx+Bx+C=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A+B)x^2+(-A+B+C)x+A+C=1.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} A+B=0, \\ -A+B+C=0,, \\ A+C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{3}, \\ B=-\frac{1}{3},. \\ C=\frac{2}{3} \end{cases}$$

Отсюда находим

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{\frac{1}{3}}{x+1}+\frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}=$$

$$=\frac{1}{3(x+1)}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x-2}{x^2-x+1}.$$

Теперь вычислим исходный интеграл

$$\int\frac{dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{3}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{3}\int\frac{x-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{x^2-x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{3}\int\frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}=$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{(2x-1)\,dx}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{d\left(x^2-x+1\right)}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Задача 6.11. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

Решение. Перепишем знаменатель рациональной дроби в следующем виде:

$$x^4+1 = x^4+2x^2-2x^2+1 = \left(x^4+2x^2+1\right) - 2x^2 =$$

$$= \left(x^2+1\right)^2 - 2x^2 = \left(x^2+1-\sqrt{2}x\right)\left(x^2+1+\sqrt{2}x\right).$$

Поскольку полученные множители являются несократимыми квадратичными функциями, то подынтегральное выражение представляется в виде

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{\left(x^2+1-\sqrt{2}x\right)\left(x^2+1+\sqrt{2}x\right)} = \frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1}.$$

Определим неизвестные коэффициенты.

$$(Ax+B)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right) + (Cx+D)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right) = 1,$$

$$Ax^3+Bx^2+\sqrt{2}Ax^2+\sqrt{2}Bx+Ax+B+Cx^3+$$
$$+Dx^2-\sqrt{2}Cx^2-\sqrt{2}Dx+Cx+D=1,$$

$$(A+C)x^3 + \left(B+\sqrt{2}A+D-\sqrt{2}C\right)x^2 +$$
$$+\left(\sqrt{2}B+A-\sqrt{2}D+C\right)x + B + D = 1.$$

Получаем

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+\sqrt{2}A+D-\sqrt{2}C=0 \\ \sqrt{2}B+A-\sqrt{2}D+C=0 \\ B+D=1 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} A=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ B=\dfrac{1}{2}\sqrt{2} \\ C=\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ D=\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}=$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}.$$

Интегрируем каждое слагаемое и находим ответ.

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx+\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx=$$

$$=-\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{2x-\sqrt{2}-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx+\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{2x+\sqrt{2}+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx=$$

$$=-\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx+\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx+$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx+\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx=$$

$$=-\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{d\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2-\sqrt{2}x+1}+$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{d\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)}{x^2+\sqrt{2}x+1}+$$

$$+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1}=-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}=$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left(\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} arctg \frac{x - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{2}}{4} arctg \frac{x + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + C =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left(\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right) +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[arctg\left(\sqrt{2}x - 1\right) + arctg\left(\sqrt{2}x + 1\right) \right] + C.$$

Задача 6.12. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x^4 - 1}$.

Решение. Разложим знаменатель на множители:

$$x^4 - 1 = \left(x^2 - 1\right)\left(x^2 + 1\right) = (x - 1)(x + 1)\left(x^2 + 1\right).$$

Запишем подынтегральную дробь в виде суммы простейших дробей.

$$\frac{1}{x^4 - 1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}.$$

Сгруппируем члены с одинаковыми степенями чтобы определить неизвестные коэффициенты из системы линейных уравнений.

$$A\left(x^2 + 1\right)(x + 1) + B\left(x^2 + 1\right)(x - 1) + (Cx + D)\left(x^2 - 1\right) = 1,$$

$$Ax^3 + Ax + Ax^2 + A + Bx^3 - Bx^2 + Bx - B + Cx^3 + Dx^2 - Cx - D = 1,$$

$$(A + B + C)x^3 + (A - B + D)x^2 + (A + B - C)x + A - B - D = 1.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ A - B + D = 0 \\ A + B - C = 0 \\ A - B - D = 1 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = -\frac{1}{4} \\ C = 0 \\ D = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Таким образом, подынтегральное выражение представляется в виде

$$\frac{1}{x^4 - 1} = \frac{\frac{1}{4}}{x - 1} - \frac{\frac{1}{4}}{x + 1} - \frac{\frac{1}{2}}{x^2 + 1}.$$

Окончательно находим

$$\int \frac{dx}{x^4 - 1} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x - 1} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x + 1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\arctan x + C =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\arctan x + C.$$

Задача 6.13. Вычислить интеграл $\int \frac{5x}{(x-1)^3}\,dx.$

Решение. Разложим подынтегральное выражение на сумму простейших дробей, учитывая что знаменатель имеет кратный корень 3-го порядка:

$$\frac{5x}{(x-1)^3} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1}.$$

Определим неизвестные коэффициенты.

$$A + B(x-1) + C(x-1)^2 = 5x,$$

$$\Rightarrow A + Bx - B + Cx^2 - 2Cx + C = 5x,$$

$$\Rightarrow Cx^2 + (B-2C)x + A - B + C = 5x.$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} C = 0 \\ B - 2C = 5 \\ A - B + C = 0 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} A = 5 \\ B = 5. \\ C = 0 \end{cases}$$

Следовательно, $\frac{5x}{(x-1)^3} = \frac{5}{(x-1)^3} + \frac{5}{(x-1)^2}$. Исходный интеграл равен

$$\int \frac{5x}{(x-1)^3}\,dx =$$

$$= \int\left(\frac{5}{(x-1)^3} + \frac{5}{(x-1)^2}\right)dx = 5\int\frac{dx}{(x-1)^3} + 5\int\frac{dx}{(x-1)^2} =$$

$$= 5\cdot\frac{(x-1)^{-2}}{-2} - \frac{5}{x-1} + C = -\frac{5}{2(x-1)^2} - \frac{5}{x-1} + C.$$

Задача 6.14. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{(x^2+x-1)^2}.$

Решение. Выделим в знаменателе $x^2 + x - 1$ полный квадрат:

$$\int\frac{dx}{(x^2+x-1)^2} = \int\frac{dx}{\left(x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)^2} = \int\frac{dx}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^2}.$$

Найдем полученный интеграл с помощью формулы редукции

$$\int \frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^k} = \frac{t}{2m^2\left(k-1\right)\left(t^2+m^2\right)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2m^2\left(k-1\right)}\int \frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}$$

Получаем ответ:

$$\int \frac{dx}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^2} = \frac{1}{2\cdot\frac{3}{4}\cdot 1\cdot\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)} +$$

$$+\frac{4-3}{2\cdot\frac{3}{4}\cdot 1}\int \frac{dx}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)} =$$

$$= \frac{2}{3\left(x^2+x+1\right)} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)} =$$

$$= \frac{2}{3\left(x^2+x+1\right)} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\,arctg\,\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{3\left(x^2+x+1\right)} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\,arctg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Задача 6.15. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{x+9}}{x}dx.$

Решение. Сделаем подстановку:

$$u = \left(x+9\right)^{\frac{1}{2}},\ \Rightarrow x+9 = u^2,\ \Rightarrow x = u^2-9,\ dx = 2udu.$$

Вычислим интеграл

$$\int \frac{\sqrt{x+9}}{x}dx = \int \frac{u}{u^2-9}\cdot 2udu = 2\int \frac{u^2}{u^2-9}du = 2\int \frac{u^2-9+9}{u^2-9}du =$$

$$2\int\left(1+\frac{9}{u^2-9}\right)du = 2\int du + 18\int \frac{du}{u^2-3^2} =$$

$$2u + 18\cdot\frac{1}{6}\ln\left|\frac{u-3}{u+3}\right| + C = 2\sqrt{x+9} + 3\ln\left|\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+9}+3}\right| + C.$$

Задача 6.16. Вычислить интеграл $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}dx.$

Решение. Используем следующую подстановку:

$$\sqrt{x} = u, \ \Rightarrow x = u^2, \ dx = 2udu.$$

Тогда интеграл (обозначим его как I) равен

$$I = \int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} dx = \int \frac{u-1}{u+1} 2udu = 2\int \frac{u^2-u}{u+1} du.$$

Разделим числитель на знаменатель, выделив правильную рациональную дробь.

$$\frac{u^2-u}{u+1} = u-2+\frac{2}{u+1}.$$

Находим искомый интеграл:

$$I = 2\int \left(u-2+\frac{2}{u+1}\right) du = 2\int udu - 4\int du + 4\int \frac{du}{u+1} =$$

$$= \frac{2u^2}{2} - 4u + 4\ln|u+1| + C = x - 4\sqrt{x} + 4\ln\left|\sqrt{x}+1\right| + C.$$

Задача 6.17. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$.

Решение. Запишем интеграл в виде

$$I = \int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{dx}{x+x^{\frac{1}{3}}}.$$

Поскольку наименьшее общее кратное знаменателей дробных степеней равно 3, то сделаем замену:

$$u = x^{\frac{1}{3}}, \ \Rightarrow x = u^3, \ dx = 3u^2du.$$

Получаем новый интеграл

$$I = \int \frac{dx}{x+x^{\frac{1}{3}}} = \int \frac{3u^2du}{u^3+\left(u^3\right)^{\frac{1}{3}}} = 3\int \frac{u^2du}{u^3+u} = 3\int \frac{udu}{u^2+1}.$$

Сделаем еще одну замену:

$$t = u^2+1, \ dt = 2udu, \ \Rightarrow udu = \frac{dt}{2}.$$

Находим окончательный ответ:

$$I = 3\int \frac{udu}{u^2+1} = 3\int \frac{\frac{dt}{2}}{t} = 3\cdot\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{3}{2}\ln|t| + C =$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left(u^2+1\right) + C = \frac{3}{2}\ln\left(\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2+1\right) + C = \frac{3}{2}\ln\left(x^{\frac{2}{3}}+1\right) + C =$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left(\sqrt[3]{x^2}+1\right) + C.$$

Задача 6.18. Вычислить интеграл $I=\int\frac{dx}{\sqrt[5]{x}-1}$.

Решение. Запишем интеграл в более удобном виде:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[5]{x}-1}=\int\frac{dx}{x^{\frac{1}{5}}-1}.$$

Сделаем подстановку:

$$x^{\frac{1}{5}}=u,\ \Rightarrow x=u^5,\ \ dx=5u^4du.$$

Интеграл через новую переменную u имеет вид

$$I=\int\frac{dx}{x^{\frac{1}{5}}-1}=\int\frac{5u^4du}{u-1}=5\int\frac{u^4du}{u-1}.$$

Поскольку степень числителя больше степени знаменателя, разделим числитель на знаменатель.

$$\frac{u^4}{u-1}=u^3+u^2+u+1+\frac{1}{u-1}\Rightarrow$$

$$I=5\int\left(u^3+u^2+u+1+\frac{1}{u-1}\right)du=5\left(\frac{u^4}{4}+\frac{u^3}{3}+\frac{u^2}{2}+u+\ln|u-1|\right)+C.$$

Задача 6.19. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}-2}}$.

Решение. Сделаем подстановку:

$$\sqrt{x}-2=u^2,\ \Rightarrow\sqrt{x}=u^2+2,\ \Rightarrow x=\left(u^2+2\right)^2=$$

$$=u^4+4u^2+4,\ \ dx=\left(4u^3+8u\right)du.$$

Получаем

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}-2}}=\int\frac{\left(4u^3+8u\right)du}{u}=4\int\left(u^2+2\right)du=$$

$$=\frac{4u^3}{3}+8u+C=\frac{4}{3}\sqrt{\left(\sqrt{x}-2\right)^3}+8\sqrt{\sqrt{x}-2}+C.$$

Задача 6.20. Вычислить интеграл $\int\sqrt{e^x+1}dx$.

Решение. Используем подстановку

$$e^x+1=u^2,\ \Rightarrow e^xdx=2udu,\ \Rightarrow dx=\frac{2udu}{e^x}=\frac{2udu}{u^2-1}.$$

Тогда интеграл равен

$$I=\int\sqrt{e^x+1}dx=\int u\frac{2udu}{u^2-1}=2\int\frac{u^2du}{u^2-1}=$$

$$= 2\int \frac{u^2-1+1}{u^2-1}\,du =$$

$$= 2\int\left(1+\frac{1}{u^2-1}\right)du = 2\int du - 2\int\frac{du}{1-u^2} =$$

$$= 2u - 2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C = 2u - \ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C =$$

$$= 2\sqrt{e^x+1} - \ln\left|\frac{1+\sqrt{e^x+1}}{1-\sqrt{e^x+1}}\right| + C.$$

Задача 6.21. Вычислить интеграл $\int\limits_0^2\left(x^3-x^2\right)dx.$

Решение. Применяя формулу Ньютона-Лейбница, получаем

$$\int\limits_0^2\left(x^3-x^2\right)dx = \left.\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^2 = \left(\frac{16}{4}-\frac{8}{3}\right)-0 = \frac{4}{3}.$$

Задача 6.22. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1\left(\sqrt[3]{t}-\sqrt{t}\right)dt.$

Решение.

$$\int\limits_0^1\left(\sqrt[3]{t}-\sqrt{t}\right)dt = \int\limits_0^1\left(t^{\frac{1}{3}}-t^{\frac{1}{2}}\right)dt =$$

$$= \left.\left(\frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}-\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right)\right|_0^1 = \left.\left(\frac{3t^{\frac{4}{3}}}{4}-\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3}\right)\right|_0^1 = \left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)-0 = \frac{1}{12}.$$

Задача 6.23. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1\frac{x}{\left(3x^2-1\right)^4}dx.$

Решение. Сделаем замену:

$$t = 3x^2-1, \;\Rightarrow dt = 6xdx, \;\Rightarrow xdx = \frac{dt}{6}.$$

Пересчитаем пределы интегрирования. Если $x=0$, то $t=-1$. Если же $x=1$, то $t=2$. Тогда интеграл через новую переменную t легко вычисляется:

$$\int\limits_0^1\frac{x}{\left(3x^2-1\right)^4}dx = \int\limits_{-1}^2\frac{\frac{dt}{6}}{t^4} = \frac{1}{6}\int t^{-4}dt = \left.\frac{1}{6}\left(\frac{t^{-3}}{-3}\right)\right|_{-1}^2 =$$

$$= -\frac{1}{18}\left(\frac{1}{8}-1\right) = \frac{7}{144}.$$

Задача 6.24. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\ln 2} xe^{-x}dx.$

Решение. Запишем интеграл в виде

$$I = \int\limits_0^{\ln 2} xe^{-x}dx = -\int\limits_0^{\ln 2} xd\left(e^{-x}\right).$$

Используем интегрирование по частям: $\int udv = uv - \int vdu.$ В нашем случае пусть будет

$$u = x,\ dv = d\left(e^{-x}\right),\ \Rightarrow du = 1,\ v = e^{-x}.$$

Следовательно, интеграл равен

$$I = -\int\limits_0^{\ln 2} xd\left(e^{-x}\right) = -\left[\left(xe^{-x}\right)\Big|_0^{\ln 2} - \int\limits_0^{\ln 2} e^{-x}dx\right] =$$

$$= -\left(xe^{-x}\right)\Big|_0^{\ln 2} + \int\limits_0^{\ln 2} e^{-x}dx = -\left(xe^{-x}\right)\Big|_0^{\ln 2} - \left(e^{-x}\right)\Big|_0^{\ln 2} =$$

$$= -\left[e^{-x}\left(x+1\right)\right]\Big|_0^{\ln 2} = -e^{-\ln 2}\left(\ln 2 + 1\right) + e^0 \cdot 1 = -\frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln e}{2} + \ln e =$$

$$= \frac{\ln e}{2} - \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{2}\left(\ln e - \ln 2\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{e}{2}.$$

Решения следующих задач опишем кратко.

Задача 6.25.

$$\int \frac{\sin^2 x dx}{\sin^2 x - \cos^2 x} = \left[\operatorname{tg} x = t, \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, dx = \frac{dt}{1+t^2}\right] =$$

$$= \int \frac{\frac{t^2}{1+t^2}\cdot\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2}}dt = \int \frac{t^2}{t^4 - 1}dt = \int\left(-\frac{1}{4(t+1)} + \frac{1}{2\left(t^2+1\right)} + \frac{1}{4(t-1)}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|tgx - 1\right| - \frac{1}{4}\ln\left|tgx + 1\right| + \frac{1}{2}x + C.$$

Задача 6.26.

$$\int \cos 3x \cdot \sin 5x dx = \frac{1}{2}\int\left(\sin 2x + \sin 8x\right)dx = -\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 8x + C.$$

Задача 6.27.

$$\int \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right) dx =$$

$$\frac{x}{4}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx =$$

$$= \frac{x}{4}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{1}{8}\int \left(1+\cos 4x\right) dx = \frac{x}{4}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{x}{8}+\frac{1}{32}\sin 4x + C$$

$$= \frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C.$$

Для усвоения изложенного материала предлагаем вычислить интегралы и проверить истинность следующих равенств:

1) $\int \ln(4x^2+1)dx = x\ln(4x^2+1) + arctg 2x - 2x + C;$

2) $\int_{-2}^{0} (x^2-4)\cos 3x dx = \frac{4}{9}\cos 6 - \frac{2}{27}\sin 6;$

3) $\int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2} dx = -\frac{1}{x-\sin x} + C;$

4) $\int_{0}^{1/2} \frac{8x - arctg 2x}{1+4x^2} dx = \ln 2 - \frac{\pi^2}{64};$

5) $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)(x-2)} dx = x + 2\ln|x-4| + 12\ln|x-3| - 8\ln|x-2| + C;$

6) $\int \frac{x^3+6x^2+13x+9}{(x+1)(x+2)^3} dx = \ln|x+1| - \frac{1}{2(x+2)^2} + C;$

7) $\int \frac{x^3+5x^2+12x+4}{(x+2)^2(x^2+4)} dx = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + arctg\frac{x}{2} + C;$

8) $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x - \sin x}{(1+\sin x)^2} dx = \frac{1}{6};$

9) $\int_{\pi/4}^{arctg 3} \frac{dx}{(3tgx+5)\sin 2x} = \frac{1}{10}(\ln 3 - \ln 14 + \ln 8);$

10) $\int_0^{\pi} 2^4 \cos^8 \frac{x}{2}\, dx = \frac{35}{8}\pi;$

Контрольные вопросы

1. Как определяется интеграл с переменным верхним пределом? Перечислите его свойства.

2. Как выводится формула Ньютона-Лейбница?

3. Как производятся замена переменных и интегрирование по частям в определенном интеграле? Расскажите это на примерах.

4. Какие функции называются дробно-рациональными? Какая алгебраическая дробь называется правильной (неправильной)?

5. Как выделяется в неправильной дроби ее целая часть и правильная дробная часть?

6. Какие дроби называются простейшими или элементарными? Как они интегрируются?

7. Какие действия надлежит произвести, чтобы проинтегрировать дробно-рациональную функцию общего вида? Расскажите это на конкретном примере: $\int \frac{3x^3 - 3x^2 + 2x - 3}{x^2\left(x^2 - 2x + 3\right)}\, \mathrm{d}x.$

8. Как интегрируются дробно-рациональные выражения от тригонометрических функций?

9. Какие типы частных подстановок вы знаете для интегрировании тригонометрических выражений?

10. Как осуществляется интегрирование иррациональных выражений. Продемонстрируйте это на примерах: $\int\limits_3^5 \sqrt{\frac{2+x}{x+6}}\, \mathrm{d}x,\ \int\limits_{-2}^{0} \sqrt{-x^2+4}\, \mathrm{d}x.$

Для усвоения изложенной теории рекомендуем также выполнить задачи по теме этой лекции из типового расчета «Интегрирование».