Лекция 8. Несобственные интегралы. Геометрические приложения интегралов

Ранее рассматривались интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$ с конечными пределами a,b и от ограниченных функций $f(x)$. Если хотя бы одно из этих условий нарушается, то указанный интеграл будет *несобственным.* Такие интегралы часто встречаются в приложениях, поэтому перейдем к их изучению.

8.1. Несобственные интегралы

Сначала рассмотрим интегралы с бесконечными пределами.

Определение 8.1. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a,N]\subset[a,+\infty)$. Тогда если существует конечный предел $\lim\limits_{N\to+\infty}\int_a^N f(x)\,dx = I,$ то говорят, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится.* При этом пишут $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = I.$ Если же указанный предел не существует или равен бесконечности, то говорят, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *расходится.*

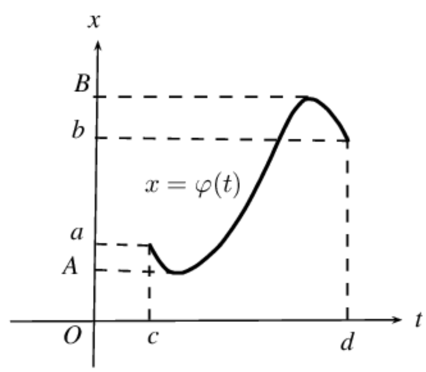

Рис. 8.1

Аналогично определяются интегралы:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{N\to+\infty}\int_{-N}^{b} f(x)\,dx;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{N\to+\infty}\int_{-N}^{c} f(x)\,dx + \lim_{M\to+\infty}\int_{c}^{M} f(x)\,dx$$

(здесь c — произвольная конечная точка).

Эти интегралы называют *несобственными интегралами первого рода.* Их геометрический смысл ясен из рис. 7.1, где площадь $S=\int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$ Теперь рассмотрим интегралы от неограниченных функций.

Определение 8.2. Если функция $f(x)$ не ограничена в окрестности точки $x=b$ (ее называют *особой точкой*) и является интегрируемой на любом отрезке $[a,b-\varepsilon] \subset [a,b),$ то по определению полагают $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$ Если этот предел существует и конечен, то говорят, что интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ *второго рода* сходится. В противном случае он называется расходящимся. Аналогичный смысл имеют интегралы (второго рода)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx, \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

где в первом случае точка $x=a$ является особой, а во втором случае точка $c\in(a,b)$ является особой. Поскольку заменой переменной $t=\dfrac{1}{b-x}$ интеграл второго рода $\int_a^b f(x)\,dx$ ($x=b$ — особая точка) сводится к интегралу первого рода, то будем изучать только интегралы с бесконечным верхним пределом. Сначала покажем, что *эталонный интеграл* $(a>0)$

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \left[\begin{array}{l} \textit{сходится при } \alpha>1, \\ \textit{расходится при } \alpha\le 1. \end{array}\right.$$

Действительно, имеем

$$\int_a^N \frac{dx}{x^\alpha} = \left[\begin{array}{l} \ln x\,\big|_{x=a}^{x=N} = \ln N - \ln a, \alpha=1, \\ \dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_{x=a}^{x=N} = \dfrac{N^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \dfrac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}, \alpha\ne 1. \end{array}\right.$$

Переходя здесь к пределу при $N\to+\infty,$ получаем наше утверждение. С помощью эталонного интеграла можно исследовать сходимость других несобственных интегралов.

Теорема сравнения 1. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы на произвольном отрезке* $[a,N]\subset[a,+\infty)$ *и имеют место неравенства* $0\le f(x)\le g(x)\big(\forall x\in[a,+\infty)\big).$ *Тогда если сходится интеграл* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx,$ *то и сходится интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$ *Если же интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *расходится, то и расходится интеграл* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$

Доказательство основано на теореме о пределе монотонной функции: *если функция* $p(x)$ *не убывает на промежутке* $[a,+\infty)$ *и ограничена сверху (т. е.* $\exists M=\text{const}: p(x)\le M\left(\forall x\in[a,+\infty)\right)$*, то она имеет конечный предел* $\lim\limits_{x\to\infty} p(x)=P$.

Пусть интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится. Тогда существует предел $\lim\limits_{N\to\infty}\int_a^N g(x)\,dx=I$, и поэтому функция $\phi(N)=\int_a^N g(x)\,dx$ ограничена при $N\in[a,+\infty): -M\le\phi(N)\le M \quad \forall N\in[a,+\infty)\,(M=\text{const})$. Из неравенства $f(x)\le g(x)$ получаем неравенство $f(x)\le M \quad \forall N\in[a,+\infty)$, т. е. функция $\psi(N)=\int_a^N f(x)\,dx$ ограничена сверху. Эта функция не убывает, т.е. $\psi(N_1)\le\psi(N_2)$ при $N_1<N_2$. Действительно, в силу неотрицательности функции $f(x)$ имеем

$$\psi(N_2)=\int_a^{N_1} f(x)\,dx+\underbrace{\int_{N_1}^{N_2} f(x)\,dx}_{\ge 0}\ge\int_a^{N_1} f(x)\,dx=\psi(N_1)\left(\forall N_2>N_1\right),$$

поэтому применима теорема о пределе монотонной функции, и значит, существует конечный предел $\lim\limits_{N\to\infty}\psi(N)\equiv\lim\limits_{N\to\infty}\int_a^N f(x)\,dx=I_1$, т. е. интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится.

Если же интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, то в силу неотрицательности функции $f(x)$ будем иметь $\lim\limits_{N\to\infty}\int_a^N f(x)\,dx=+\infty$. Переходя к пределу при $N\to+\infty$ в неравенстве $\int_a^N f(x)\,dx\le\int_a^N g(x)\,dx$, получаем, что $\lim\limits_{N\to\infty}\int_a^N g(x)\,dx=+\infty$, т. е. интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ также расходится. Теорема доказана.

Теорема сравнения 2. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ ***положительны*** *и интегрируемы на произвольном отрезке* $[a,N]\subset[a,+\infty)$. *Пусть, кроме того, существует предел* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=K_{\ne 0}^{\ne\infty}$. *Тогда интегралы* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *и* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Замечание 7.1. При применении этих теорем часто используется эквивалентность бесконечно малых функций (см. теорему 1.6).

Например, интеграл $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{3+x\sqrt{x}}\,dx$ сходится, так как $\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{3+x\sqrt{x}}\sim\dfrac{\frac{1}{x}}{x\sqrt{x}}=\dfrac{1}{x^{5/2}}$ и интеграл $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^{5/2}}$ сходится ($\alpha=5/2>1$; см. эталонный интеграл и теорему сравнения 2).

Отметим, что теоремы сравнения верны лишь для неотрицательных подынтегральных функций. Если эти функции не являются знакопостоянными, то вводят понятие абсолютной сходимости: говорят, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится абсолютно*, если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$. Если последний интеграл расходится, а сам интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то его называют *условно сходящимся интегралом*.

Нетрудно показать, что *из сходимости интеграла* $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ *вытекает обычная сходимость интеграла* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Обратное, вообще говоря, неверно. Можно показать, например, что интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится, а интеграл $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ расходится. Тем не менее, при исследовании сходимости интегралов от знакопеременных функций изучают сначала их абсолютную сходимость (здесь можно применить теоремы сравнения), а затем — условную сходимость.

Например, рассмотрим интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x\ln^2 x}\,dx$. Здесь подынтегральная функция изменяет знак на полуинтервале $[2,+\infty)$, поэтому применить к нему теоремы сравнения нельзя. Рассмотрим «модульный» интеграл $I = \int_2^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x\ln^2 x}\right| dx.$ Здесь подынтегральная функция неотрицательна, и поэтому к этому интегралу можно применить теорему сравнения 1:

$$\left|\frac{\sin x}{x\ln^2 x}\right| \le \frac{1}{x\ln^2 x}\left(\forall x \in [2,+\infty)\right).$$

Так как интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x}\Big|_{x=2}^{x=+\infty} = \frac{1}{\ln 2} < \infty$ сходится, то и интеграл I также сходится, а, значит, исходный интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x\ln^2 x}\,dx$ сходится абсолютно.

7.2. Вычисление площадей плоских фигур

Из геометрического смысла определенного интеграла вытекает следующее утверждение.

Теорема 7.1. *Если фигура* D *задана неравенствами* $a \le x \le b, f_1(x) \le y \le f_2(x)$, *где функции* $f_1(x), f_2(x)$ *непрерывны на отрезке* $[a,b]$ *(рис. 7.2), то площадь этой фигуры вычисляется по формуле*

$$S_D = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x) \right] dx.$$

Если фигура ограничена линиями $y = f(x), y = 0 (a \le x \le b)$, *причем функция* $f(x)$ *знакопеременна и непрерывна на отрезке* $[a,b]$, *то её площадь равна* $\int_a^b |f(x)| dx$.

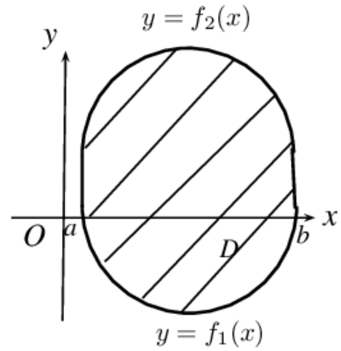

Рис. 7.2

Действительно, фигуру D можно перенести параллельно оси Oy вверх и тогда она будет сверху и снизу ограничена линиями

$$y = f_2(x) + C, y = f_1(x) + C \left(C > \left| \min_{x \in [a,b]} f_1(x) \right| \right),$$

расположенными выше оси Ox. Поэтому площадь фигуры D будет равна разности площадей криволинейных трапеций с верхними границами $y = f_2(x) + C, y = f_1(x) + C$ соответственно:

$$S_D = \int_a^b \left(f_2(x) + C \right) dx - \int_a^b \left(f_1(x) + C \right) dx = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x) \right] dx.$$

Переходя к вычислению площади в полярных координатах, напомним, что любая точка $M(x, y)$ на плоскости вполне однозначно определяется своим полярным радиусом $\left| \overrightarrow{OM} \right| = \rho$ и полярным углом [1] $\theta = \left(\overrightarrow{OM}, ^\wedge \overrightarrow{Ox} \right), 0 \le \theta < 2\pi$ (считаем, что началу координат O соответствует радиус $\rho = 0$ и любой фиксированный полярный угол $\theta \in [0, 2\pi)$). Поэтому любую кривую на плоскости можно задать уравнением $\rho = \rho(\theta), \alpha \le \theta \le \beta$. Переход от декартовых координат точки $M(x, y)$ к полярным осуществляется формулами $x = \rho \cos\theta, y = \rho \sin\theta$.

Теорема 7.2. *Пусть фигура* D *задана в полярных координатах неравенствами* $0 \le \rho \le \rho(\theta), \alpha \le \theta \le \beta$ (*рис.*7.3а), *причем функция* $\rho = \rho(\theta)$ *непрерывна на отрезке* $[\alpha, \beta]$. *Тогда площадь этой фигуры вычисляется по формуле*

$$S_D = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \rho^2(\theta) d\theta.$$

[1] Считаем, что углы заданы в радианной мере.

Если фигура описывается неравенствами $\rho_1(\theta) \le \rho \le \rho_2(\theta), \alpha \le \theta \le \beta$, *причем функции* $\rho_1(\theta), \rho_2(\theta)$ *непрерывны на отрезке* $[\alpha, \beta]$, *то её площадь вычисляется по формуле*

$$S_D = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left[\rho_2^2(\theta) - \rho_1^2(\theta)\right] d\theta.$$

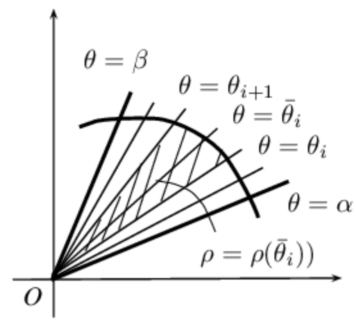

Рис. 7.3а

Доказательство. Произведем разбиение $(\Delta): \alpha = \theta_0 < \theta_1 < ... < \theta_n = \beta$ отрезка $[\alpha, \beta]$ на частичные отрезки $[\theta_i, \theta_{i+1}]$ (рис. 7.3а) и обозначим $\lambda = \max\limits_{i=0,n-1} \Delta\theta_i = \max\limits_{i=0,n-1} (\theta_{i+1} - \theta_i)$. Возьмем произвольно $\bar{\theta}_i \in [\theta_i, \theta_{i+1}]$. Величина $\frac{1}{2}\rho^2(\bar{\theta}_i)\Delta\theta_i$ равна площади кругового сектора радиуса $\rho(\bar{\theta}_i)$ с дугой, равной $\Delta\theta_i$, а площадь всей фигуры D приближенно равна $S_D \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}\rho^2(\bar{\theta}_i)\Delta\theta_i$. Это равенство будет тем точнее, чем мельче разбиение (Δ), и при $\lambda \to 0$ оно становится точным, т. е.

$$S_D = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}\rho^2(\bar{\theta}_i)\Delta\theta_i = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta) d\theta.$$

При этом указанный интеграл существует, так как функция $\rho = \rho(\theta)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$. Теорема доказана.

Площади фигур с замкнутой границей удобно вычислять, пользуясь заданием границы уравнениями в параметрической форме.

Теорема 7.3. *Пусть фигура* D *имеет границу* Γ, *заданную параметрически уравнениями*

$$x = x(t), y = y(t), \alpha \le t \le \beta,$$

причем при возрастании параметра t от α к β обход границы Γ совершается так, что сама область D остается слева от наблюдателя. Если при этом функции $x'(t), y(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$, то площадь этой фигуры вычисляется по формуле

$$S_D = -\int_\alpha^\beta y(t)\,x'(t)\,dt \equiv -\int_\alpha^\beta y dx\,|_{x=x(t),\,y=y(t)}$$

(здесь $t=\alpha$ — начало обхода, $t=\beta$ — конец обхода границы Γ).

7.3. Вычисление длины дуги

Пусть на плоскости Oxy задана некоторая незамкнутая кривая Γ (первый слева рис.7.4). Произведем разбиение (Δ):

$$M_0\overset{\frown}{M}_n = \bigcup_{i=1}^{n-1} M_i\overset{\frown}{M}_{i+1}$$

этой дуги на частичные дуги $M_i\overset{\frown}{M}_{i+1}$, в каждую из которых впишем хорду M_iM_{i+1}. Тогда получим ломанную $M_0M_1...M_n$, вписанную в дугу Γ. Пусть $\Delta s_i = |M_iM_{i+1}|$ — длина хорды M_iM_{i+1}.

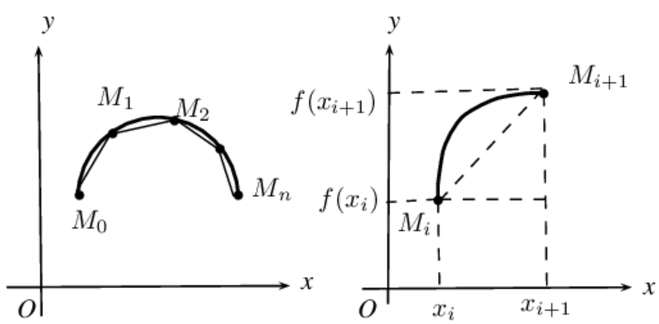

Рис. 7.4

Определение 7.3. За длину дуги l кривой Γ принимают предел[2], к которому стремится периметр ломанной, вписанной в эту дугу, при стремлении длины максимального звена этой ломанной к нулю, т. е. $l = \lim\limits_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta s_i$. Если кривая Γ замкнутая, то разбивают ее двумя несовпадающими точками на две незамкнутые кривые Γ_1 и Γ_2 $\left(\Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2\right)$ и тогда дл. $\Gamma =$ дл. $\Gamma_1 +$ дл. Γ_2.

Теорема 7.4. *Если дуга Γ задана уравнением $y = f(x), a \le x \le b$, где функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,b]$, то ее длина вычисляется по формуле*

$$l = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx. \quad (7.1)$$

Доказательство. Произведем разбиение (Δ) дуги Γ на частичные дуги $M_i\overset{\frown}{M}_{i+1}$. Это разбиение порождает разбиение

---

[2] Если этот предел существует и конечен, то дуга l называется *спрямляемой*.

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

отрезка $[a,b]$ на частичные отрезки $[x_i, x_{i+1}]$. По определению 7.3 имеем $l = \lim\limits_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta s_i$. Длина хорды $M_i M_{i+1}$ равна (см. второй слева рис. 7.4) величине

$$\Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{\Delta x_i^2 + \left(f(x_{i+1}) - f(x_i) \right)^2} =$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x_i} \right)^2} \Delta x_i = \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \right)^2} \Delta x_i.$$

По теореме Лагранжа существует точка $c_i \in (x_i, x_{i+1})$ такая, что

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

поэтому $\Delta s_i = \sqrt{1 + \left(f'(c_i) \right)^2} \Delta x_i$. Учитывая это, получаем, что

$$l = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta s_i = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + \left(f'(c_i) \right)^2} \Delta x_i =$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x) \right)^2} dx.$$

Теорема доказана.

Замечание 7.2. Величина $dl = \sqrt{1 + \left(f'(x) \right)^2} dx$ называется *дифференциалом дуги* $y = f(x), a \le x \le b$. Учитывая, что $f'(x) dx = dy$, её можно записать в виде $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Мы получили теорему Пифагора для криволинейного треугольника с катетами dx, dy и «гипотенузой» dl. Теперь формулу (7.1) для вычисления длины дуги можно записать кратко так: $l = \int_a^b dl$. Эта форма записи длины дуги особенно удобна, если дуга Γ задана параметрически или в полярной форме. Из нее можно получить следующие утверждения.

Теорема 7.5. *Если дуга* Γ *задана параметрически уравнениями* $x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$, *где функции* $x(t), y(t)$ *непрерывно-дифференцируемы на отрезке* $[\alpha, \beta]$, *то ее длина вычисляется по формуле*

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt.$$

Если дуга Γ *задана в полярных координатах уравнением* $\rho = \rho(\theta), \varphi_1 \le \theta \le \varphi_2$, *где функция* $\rho(\theta)$ *непрерывно-дифференцируема на отрезке* $[\varphi_1, \varphi_2]$, *то её длина вычисляется по формуле*

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} d\theta.$$

Действительно, если Γ задана в параметрической форме, то

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\dot{x}^2(t) dt^2 + \dot{y}^2(t) dt^2} = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,dt.$$

Рекомендуем получить формулу длины дуги в полярных координатах самостоятельно.

Например, если дуга Γ задана уравнением $\rho = 2\cos\theta, 0 \le \theta \le \pi/6,$ то её длина равна

$$l = \int_0^{\pi/6} \sqrt{4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta}\,d\theta = 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

7.4. Вычисление объёмов тел

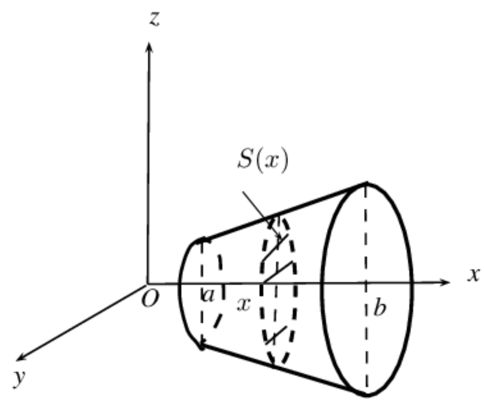

Рис. 7.5

Теорема 7.6. *Пусть тело* W *заключено между плоскостями* $x = a$ *и* $x = b$, *а* $S = S(x)$ *— площадь его поперечного сечения плоскостью* $x = \text{const}$ *(рис. 7.5). Если функция* $S(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$, *то объём тела вычисляется по формуле*

$$V = \int_a^b S(x)\,dx.$$

Доказательство. Произведем разбиение (5.1) отрезка $[a,b]$ на частичные отрезки $[x_i, x_{i+1}]$ и обозначим $\lambda = \max\limits_{i=\overline{0,n-1}} \Delta x_i = \max\limits_{i=\overline{0,n-1}} (x_{i+1} - x_i)$ — диаметр разбиения (5.1). Плоскости $x = x_i$ разобьют тело W на тела W_i, которые можно приближенно считать прямыми круговыми цилиндрами высотой $h = \Delta x_i$ и основаниями — кругами площади $S = S(\overline{x}_i)$, где $\overline{x}_i$ — произвольная фиксированная точка отрезка $[x_i, x_{i+1}]$, $S(\overline{x}_i)$ — площадь поперечного сечения плоскостью $x = \overline{x}_i$. Объём тела W приближенно равен сумме объёмов тел W_i, т. е. $V \approx \sum_{i=0}^{n-1} V_i = \sum_{i=0}^{n-1} S(\overline{x}_i)\Delta x_i$. Это равенство будет тем точнее, чем мельче разбиение (5.1), и при $\lambda \to 0$ оно становится точным, т. е.

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} S(\overline{x}_i)\Delta x_i = \int_a^b S(x)\Delta x.$$

Теорема доказана.

Замечание 7.3. Если тело W получено вращением криволинейной трапеции

$$D=\left\{0\le y\le f\left(x\right),a\le x\le b\right\}$$

вокруг оси Ox, то объём этого тела вычисляется по формуле

$$V=\pi\int_a^b f^2\left(x\right)dx.$$

Действительно, в этом случае поперечное сечение является кругом радиуса $R=f\left(x\right)$, поэтому $S\left(x\right)=\pi\cdot f^2\left(x\right)$. Аналогично вычисляется объём тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции $D=\left\{0\le x\le g\left(y\right),c\le y\le d\right\}:V=\pi\int_c^d g^2\left(y\right)dy$ (конечно, в выписанных формулах для V предполагается, что функции $f\left(x\right)$ и $g\left(y\right)$ непрерывны на соответствующих отрезках).

7.5. Задачи с решениями [3]

Задача 7.1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

Рис. 7.5

Решение. Сначала определим точки пересечения двух кривых (рис. 7.5).

$$x^2=\sqrt{x},\ \Rightarrow x^2-\sqrt{x}=0,$$

$$\Rightarrow\sqrt{x}\left(x^{\frac{3}{2}}-1\right)=0,\ \Rightarrow x_1=0,\,x_2=1.$$

Таким образом, данные кривые пересекаются в точках $(0,0)$ и $(1,1)$. Следовательно, площадь фигуры равна

$$S=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=\left.\left(\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}-\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^1=\frac{1}{3}\left(2\sqrt{x^3}-x^3\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}.$$

Задача 7.2. Найти площадь фигуры, ограниченную графиками функций $y=2x-x^2$ и $x+y=0$.

---

3 Задачи взяты с сайта Math24.ru.

Рис. 7.6

Решение. Найдем координаты точек пересечения кривых (рис. 7.6).

$$2x - x^2 = -x, \ \Rightarrow x^2 - 3x = 0,$$

$$\Rightarrow x(x-3) = 0, \ \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3.$$

Данная область ограничивается сверху параболой $y = 2x - x^2$, а снизу — прямой линией $y = -x$. Следовательно, площадь этой области равна

$$S = \int_0^3 \left[2x - x^2 - (-x)\right]dx = \int_0^3 \left(2x - x^2 + x\right)dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 =$$

$$= \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{9}{2}.$$

Задача 7.3. Найти площадь треугольника с вершинами в точках $(0,0)$, $(2,6)$ и $(7,1)$.

Решение. Найдем сначала уравнение стороны OA (рис. 7.7).

$$\frac{x - x_O}{x_A - x_O} = \frac{y - y_O}{y_A - y_O}, \ \Rightarrow \frac{x-0}{2-0} = \frac{y-0}{6-0},$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{6}, \ \Rightarrow y = 3x.$$

Аналогично, получим уравнение стороны OB.

$$\frac{x - x_O}{x_B - x_O} = \frac{y - y_O}{y_B - y_O}, \Rightarrow \frac{x-0}{7-0} == \frac{y-0}{1-0}, \ \Rightarrow \frac{x}{7} = \frac{y}{1}, \ \Rightarrow y = \frac{x}{7}.$$

Наконец, найдем уравнение третьей стороны AB.

$$\frac{x - x_B}{x_A - x_B} = \frac{y - y_B}{y_A - y_B}, \ \Rightarrow \frac{x-2}{7-2} =$$

$$= \frac{y-6}{1-6}, \ \Rightarrow \frac{x-2}{5} = \frac{y-6}{-5}, \ \Rightarrow y = 8 - x.$$

Как видно из рис. 7.7, площадь треугольника равна сумме двух интегралов:

$$S = I_1 + I_2 = \int_0^2 \left(3x - \frac{x}{7}\right)dx + \int_2^7 \left(8 - x - \frac{x}{7}\right)dx =$$

$$= \left(\frac{10x^2}{7}\right)\Bigg|_0^2 + \left(8x - \frac{4x^2}{7}\right)\Bigg|_2^7 =$$

$$= \frac{10 \cdot 4}{7} + \left(56 - \frac{4 \cdot 49}{7}\right) - \left(16 - \frac{4 \cdot 4}{7}\right) = 20.$$

Рис. 7.7

Задача 7.4. Вычислить площадь эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

Решение. В силу симметрии (см. рисунок 6), достаточно вычислить площадь полуэллипса, расположенного выше оси Ox, и затем результат умножить на 2. Площадь полуэллипса равна

$$S_{\frac{1}{2}}=\int_{-a}^{a}\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}dx=\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Для вычисления данного интеграла используем тригонометрическую подстановку $x=a\sin t$, $dx=a\cos tdt.$ Уточним пределы интегрирования. Если $x=-a,$ то $\sin t=-1$ и $t=-\frac{\pi}{2}.$ Если $x=a,$ то $\sin t=1$ и $t=\frac{\pi}{2}.$ Таким образом, мы получаем

$$S_{\frac{1}{2}}=\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{b}{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos tdt=$$

$$=ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=\frac{ab}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2t\right)dt=\frac{ab}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{ab}{2}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\sin(-\pi)}{2}\right]=\frac{\pi ab}{2}.$$

Следовательно, полная площадь эллипса равна $\pi ab.$

Задача 7.5. Определить, при каких значениях k интеграл

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^k}\left(k>0,k\neq 1\right)$$

сходится.

Решение. Используя определение несобственного интеграла, можно записать

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^k}=\lim_{n\to\infty}\int_1^{n}\frac{dx}{x^k}=\lim_{n\to\infty}\int_1^{n}x^{-k}dx=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^{-k+1}}{-k+1}\right)\Bigg|_1^{n}=$$

$$= \frac{1}{1-k} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(x^{-k+1} \right) \Big|_1^n =$$

$$= \frac{1}{1-k} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(n^{-k+1} - 1^{-k+1} \right) = \frac{1}{k-1} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 - n^{1-k} \right).$$

Из этого выражения видно, что существует 2 случая:

если $0 < k < 1$, то $n^{1-k} \to \infty$ при $n \to \infty$ и интеграл расходится;

если $k > 1$, то $n^{1-k} = \dfrac{1}{n^{k-1}} \to 0$ при $n \to \infty$ и интеграл сходится.

Задача 7.6. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{dx}{x^2 + 16}$.

Решение.

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+16} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{n} \frac{dx}{x^2+16} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{n} \frac{dx}{x^2+4^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4} \frac{x}{4} \right) \Big|_0^n = \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{4} - \frac{0}{4} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{4} - 0 \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

Следовательно, данный интеграл сходится.

Задача 7.7. Определить, сходится или расходится несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{dx}{x^2 e^x}$?

Решение. Заметим, что $\dfrac{1}{x^2 e^x} \le \dfrac{1}{x^2}$ для всех $x \ge 1$. Поскольку интеграл $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{dx}{x^2}$ сходится (смотрите задачу 7.5), то искомый интеграл $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{dx}{x^2 e^x}$ также сходится по теореме сравнения 1.

Задача 7.8. Вычислить интеграл $\int\limits_{-2}^{2} \dfrac{dx}{x^3}$.

Решение. Подынтегральная функция терпит разрыв в точке $x = 0$. Поэтому, представим данный интеграл как сумму следующих двух интегралов:

$$\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{x^3} = \int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{x^3} + \int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x^3}.$$

По определению несобственного интеграла получаем

$$\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{x^3} = \int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{x^3} + \int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x^3} = \lim_{\tau\to 0+} \int\limits_{-2}^{-\tau} \frac{dx}{x^3} + \lim_{\tau\to 0+} \int\limits_{\tau}^{2} \frac{dx}{x^3}.$$

Исследуем первый интеграл.

$$\lim_{\tau\to 0+}\int_{-2}^{-\tau}\frac{dx}{x^3}=\lim_{\tau\to 0+}\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right)\Bigg|_{-2}^{-\tau}=-\frac{1}{2}\lim_{\tau\to 0+}\left(\frac{1}{x^2}\right)\Bigg|_{-2}^{-\tau}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{\tau\to 0+}\left[\frac{1}{(-\tau)^2}-\frac{1}{(-2)^2}\right]=-\frac{1}{2}\lim_{\tau\to 0+}\left(\frac{1}{\tau^2}+\frac{1}{8}\right)=\infty.$$

Поскольку он расходится, то исходный интеграл также расходится.

Задача 7.9. Определить, сходится или расходится несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+8}$?

Решение. Запишем интеграл в виде следующей суммы:

$$I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+8}=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+8}+\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+8}.$$

Используя определение несобственного интеграла, получаем

$$\lim_{M\to-\infty}\int\limits_{M}^{0}\frac{dx}{(x+1)^2+7}+\lim_{N\to\infty}\int\limits_{0}^{N}\frac{dx}{(x+1)^2+7}=$$

$$\lim_{M\to-\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\,arctg\,\frac{x+1}{\sqrt{7}}\right)\Bigg|_{M}^{0}+\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\,arctg\,\frac{x+1}{\sqrt{7}}\right)\Bigg|_{0}^{N}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{7}}\left(arctg\,\frac{1}{\sqrt{7}}-\lim_{M\to-\infty}arctg\,\frac{M+1}{\sqrt{7}}\right)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{7}}\left(\lim_{N\to\infty}arctg\,\frac{N+1}{\sqrt{7}}-arctg\,\frac{1}{\sqrt{7}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{7}}\,arctg\,\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{7}}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{7}}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{7}}\,arctg\,\frac{1}{\sqrt{7}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{7}}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{7}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{\sqrt{7}}.$$

Как видно, оба предела существуют и конечны. Следовательно, искомый интеграл сходится.

Задача 7.10. Определить, сходится или расходится несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}dx$?

Решение. Запишем очевидное неравенство для модулей:

$$\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\right|\le\left|\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right|=\left|\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right|.$$

Легко показать, что интеграл $\int\limits_{1}^{\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right|dx$ сходится (смотрите также задачу 7.5).

Действительно,

$$\int_1^\infty \left|\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right| dx = \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3}} = \int_1^\infty \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \int_1^\infty x^{-\frac{3}{2}} dx = \lim_{n\to\infty}\int_1^n x^{-\frac{3}{2}} dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}\right)\Bigg|_1^n = -2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\Bigg|_1^n =$$

$$= -2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-1\right) = -2(0-1) = 2.$$

Следовательно, делаем вывод, что интеграл $\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\right| dx$ сходится по теореме сравнения 1. Тогда искомый интеграл $\int_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}} dx$ также сходится (причем абсолютно).

Задача 7.11. Определить, сходится или расходится несобственный интеграл $\int_0^4 \frac{dx}{(x-2)^3}$?

Решение. В данном интеграле подынтегральная функция имеет разрыв при $x = 2$. Поэтому, рассмотрим следующих два несобственных интеграла:

$$\int_0^4 \frac{dx}{(x-2)^3} = \int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^3} + \int_2^4 \frac{dx}{(x-2)^3}.$$

По определению получаем

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^3} + \int_2^4 \frac{dx}{(x-2)^3} = \lim_{\tau\to 0+}\int_0^{2-\tau} \frac{dx}{(x-2)^3} + \lim_{\tau\to 0+}\int_{2+\tau}^4 \frac{dx}{(x-2)^3}.$$

Найдем первый интеграл.

$$\lim_{\tau\to 0+}\int_0^{2-\tau} \frac{dx}{(x-2)^3} = \lim_{\tau\to 0+}\int_0^{2-\tau} (x-2)^{-3}\, d(x-2) =$$

$$= \lim_{\tau\to 0+}\left[\frac{(x-2)^{-3+1}}{-3+1}\right]_0^{2-\tau} = -\frac{1}{2}\lim_{\tau\to 0+}\left[\frac{1}{(x-2)^2}\right]\Bigg|_0^{2-\tau} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{\tau\to 0+}\left[\frac{1}{(2-\tau-2)^2} - \frac{1}{(0-2)^2}\right] = -\frac{1}{2}\lim_{\tau\to 0+}\left(\frac{1}{\tau^2}-\frac{1}{4}\right) = -\infty.$$

Поскольку этот интеграл расходится, то искомый интеграл $\int_0^4 \frac{dx}{(x-2)^3}$ также расходится.

Задача 7.12. Определить, при каких значениях k интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^k}\ (k>0, k\neq 1)$$

сходится.

Решение. Подынтегральное выражение имеет разрыв в точке $x=0$, поэтому мы запишем интеграл в виде

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^k} = \lim_{\tau\to 0+}\int_\tau^1 \frac{dx}{x^k} = \lim_{\tau\to 0+}\int_\tau^1 x^{-k}dx = \lim_{\tau\to 0+}\left(\frac{x^{-k+1}}{-k+1}\right)\Bigg|_\tau^1 =$$

$$= \frac{1}{1-k}\cdot\lim_{\tau\to 0+}\left(x^{-k+1}\right)\Big|_\tau^1 = \frac{1}{1-k}\cdot\lim_{\tau\to 0+}\left(1^{-k+1}-\tau^{-k+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{1-k}\cdot\lim_{\tau\to 0+}\left(1-\tau^{1-k}\right).$$

Как видно из полученного выражения, возможны 2 случая:

если $0<k<1$, то $\lim\limits_{\tau\to 0+}\tau^{1-k}=0$ и интеграл сходится;

если $k>1$, то $\lim\limits_{\tau\to 0+}\tau^{1-k}=\lim\limits_{\tau\to 0+}\frac{1}{\tau^{k-1}}=\infty$ и интеграл расходится.

Задача 7.13. Найти длину дуги линии $y=\ln x$ от $x_1=\sqrt{3}$ до $x_2=\sqrt{8}$..

Решение.

$$L=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx=\left[\begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{c}{t=\sqrt{x^2+1};\ x=\sqrt{t^2-1};\ dx=\frac{tdt}{\sqrt{t^2-1}},} \\ x & \sqrt{3} & \sqrt{8} \\ t & 2 & 3 \end{array}\right]==\int_2^3\frac{t^2dt}{t^2-1}=\int_2^3\Big(1$$

Ответ. $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

Задача 7.14. Найти длину дуги линии $y=\ln\left(1-x^2\right)$ от $x_1=0$ до $x_2=\frac{1}{2}$

Решение.

$$L=\int_0^{1/2}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^{1/2}\sqrt{1+\frac{4x^2}{\left(1-x^2\right)^2}}\,dx=\int_0^{1/2}\sqrt{\frac{\left(1+x^2\right)^2}{\left(1-x^2\right)^2}}\,dx=$$

$$= \int_0^{1/2} \frac{1+x^2}{1-x^2}\,dx = \int_0^{1/2} \left(-1 - \frac{2}{x^2-1}\right) = \left(-x - \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)\Bigg|_0^{1/2} = \ln 3 - \frac{1}{2}.$$

Ответ. $\ln 3 - \frac{1}{2}$.

Задача 7.15. Найти объём тела вращения одной арки синусоиды вокруг оси *Ox*.

Решение. В условиях нашей задачи $y = \sin x, a = 0, b = \pi,$ поэтому

$$V_x = \pi\int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \left\{\sin^2 x = \frac{1-cos2x}{2}\right\} =$$

$$= \pi\int_0^{\pi} \frac{1-cos2x}{2}\,dx = \frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\pi} dx - \int_0^{1} cos2x\,dx\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{1}{2}sin2x\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}\left(\left(\pi - \frac{1}{2}sin2\pi\right) - \left(0 - \frac{1}{2}sin0\right)\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

Контрольные вопросы

1. Как определяются несобственные интегралы первого и второго рода?

2. Как формулируются теоремы сравнения для несобственных интегралов с бесконечным верхним пределом?

3. Какие интегралы называются абсолютно сходящимися? В чем их отличие от условно сходящихся интегралов?

4. Как исследуются несобственные интегралы от знакопеременных функций?

5. Что принимается за длину дуги? Как вычисляется длина дуги в декартовых координатах и в случае параметрического ее задания?

6. Как вычисляется площадь фигуры в декартовых и полярных координатах?

7. Какими формулами пользуются при вычислении объемов тел?

Рекомендуем также решить задачи на приложения определённого интеграла в типовом расчете «Интегрирование».